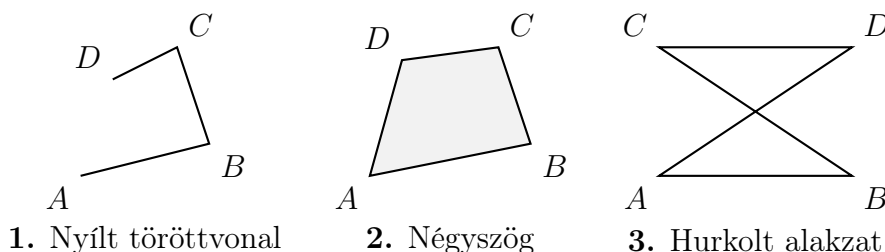


Négyszögek

7. osztály

1. A négyszögek alapfogalmai és osztályozása

Képzeld el, hogy egy papírlapon kijelölünk négy véletlenszerű pontot úgy, hogy semelyik három ne essen egyetlen egyenesre (ne legyenek kollineárisak). Ha ezeket a pontokat ceruzával, egyenes szakaszokkal sorban összekötjük, többféle alakzatot is kaphatunk attól függően, hogyan zárjuk be a vonalat.

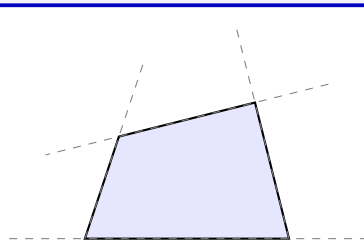


Ahogy az ábrákon is látható, az 1. esetben a vonal nem ért körbe, így egy *nyílt töröttvonalat* kaptunk. A 3. esetben a vonalak keresztezték egymást (önmetsző alakzat). **Valódi négyszögről a 2. ábra esetében beszélünk**, ahol az összekötött szakaszok egy zárt, önmagát nem metsző töröttvonalat alkotnak.

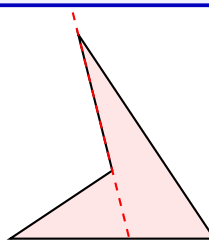
Definíció: Konvex és konkáv négyszögek

A matematikában a négyszögeket alakjuk alapján két nagy csoportra bontjuk:

- **I. Konvex (domború) négyszögek:** Olyan négyszög, amelynél bármelyik oldalegyenesét (az oldalt meghosszabbító képzeletbeli vonalat) is rajzoljuk meg, a négyszög teljes területe a vonalnak csak az egyik oldalára esik. A vonal sosem vág bele a négyszög belsejébe.
- **II. Konkáv (homorú) négyszögek:** Olyan négyszög, amelynek van legalább egy olyan oldala, amelynek meghosszabbítása "belevág", azaz kettémetszi a négyszög belső területét.



4. Konvex (domború)

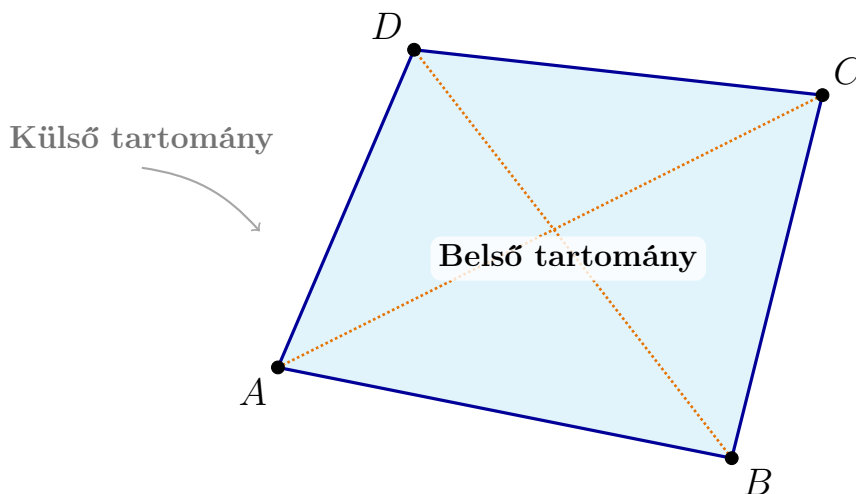


5. Konkáv (homorú)

Megjegyzés: Az iskolai tanulmányok során az esetek túlnyomó többségében kizárólag a konvex (domború) négyszögek tulajdonságaival foglalkozunk.

A konvex négyszög elemei és kerülete

Egy négyszöget a négy csúcának nagybetűs megadásával nevezzük el (pl. $ABCD$ négyszög). A matematikai konvenciók szerint a betűket a kerület mentén folyamatosan haladva, általában az óramutató járásával ellentétes (pozitív) irányban osztjuk ki.



A négyszög felépítése:

- **Csúcsok:** Az A, B, C és D pontok. Két csúcs *szomszédos*, ha egy oldalt fognak közre (pl. A és B). Két csúcs *szemközti*, ha nem köti össze őket oldal (pl. A és C).
- **Oldalak:** A csúcsokat összekötő AB, BC, CD és DA szakaszok.
- **Szögek:** A belső tartományban lévő sarkok ($\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}$).
- **Átlók:** A szemközti csúcsokat összekötő egyenes szakaszok (az ábrán szaggatott vonallal jelölve: az AC és a BD szakaszok).

Definíció: A négyszög kerülete

Bármely négyszög **kerülete** (jelölése: K) geometriai értelemben megegyezik az alakzatot határoló oldalak hosszának számszerű összegével.

$$K_{ABCD} = AB + BC + CD + DA$$

A konvex négyszögek belső szögeinek összege

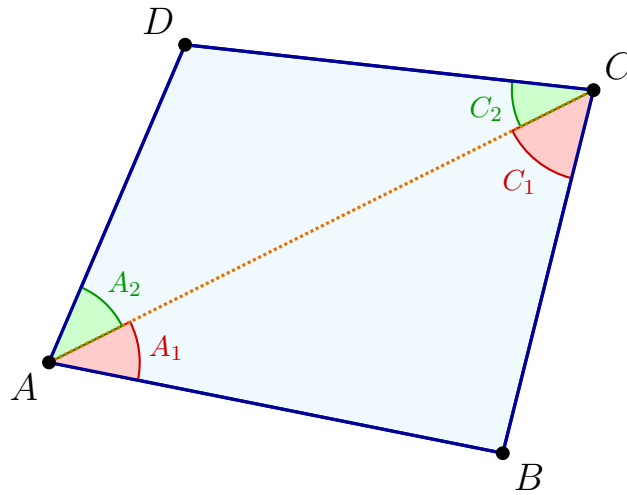
Tétel: A belső szögek összege

Bármely konvex négyszög belső szögeinek összege hajszálpontosan 360° .

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ$$

A tétel matematikai bizonyítása:

Bizonyítsuk be az állítást arra a tényre alapozva, hogy egy egyszerű háromszög belső szögeinek összege mindig 180° ! Vegyünk egy tetszőleges $ABCD$ konvex négyszöget, és húzzuk be az egyik átlóját (például az AC szakaszt). Ez az egyetlen átló a négyszöget pontosan **két darab háromszögre** (ABC és ACD háromszögre) vágja szét.



Jól látható, hogy a négyszög teljes $\hat{A}$ szöge két részre (az A_1 és A_2 szögekre) bomlott, ahogy a $\hat{C}$ szög is (C_1 és C_2). Írjuk fel a szögek összegét a két létrejött háromszögre külön-külön:

$$\text{Az } ABC \text{ háromszögben: } \hat{A}_1 + \hat{B} + \hat{C}_1 = 180^\circ$$

$$\text{Az } ACD \text{ háromszögben: } \hat{A}_2 + \hat{D} + \hat{C}_2 = 180^\circ$$

Ha a két fenti egyenlet bal és jobb oldalát egymással összeadjuk, a következőt kapjuk:

$$(\hat{A}_1 + \hat{A}_2) + \hat{B} + (\hat{C}_1 + \hat{C}_2) + \hat{D} = 180^\circ + 180^\circ$$

Mivel $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{A}$ és $\hat{C}_1 + \hat{C}_2 = \hat{C}$, a végeredmény kiadja a teljes négyszöget:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ.$$

2. A paralelogramma

Definíció: A paralelogramma fogalma

A **paralelogramma** egy olyan konvex négyszög, amelynek két-két szemközti oldala párhuzamos egymással.

Ha egy $ABCD$ négyszögről azt mondjuk, hogy paralelogramma, az definíció szerint azt jelenti, hogy:

$$AB \parallel DC \quad \text{és} \quad AD \parallel BC.$$

Tétel: A paralelogramma alaptulajdonságai

Minden paralelogrammára igazak az alábbi geometriai tulajdonságok:

1. A szemközti oldalai páronként kongruensek ($AB \equiv DC$ és $AD \equiv BC$).
2. A szemközti belső szögei páronként kongruensek ($\hat{A} \equiv \hat{C}$ és $\hat{B} \equiv \hat{D}$).
3. A szomszédos szögei kiegészítő szögek (összegük 180°).
4. A két átlója pontosan felezi egymást a metszéspontban.

A tulajdonságok logikai bizonyítása

A matematikai tételeket nem elég kimondani, igazolnunk is kell őket. Ehhez a háromszögek kongruenciáját (jelölése: $\equiv$) fogjuk felhasználni.

1. és 2. tulajdonság bizonyítása (Szemközti oldalak és szögek):

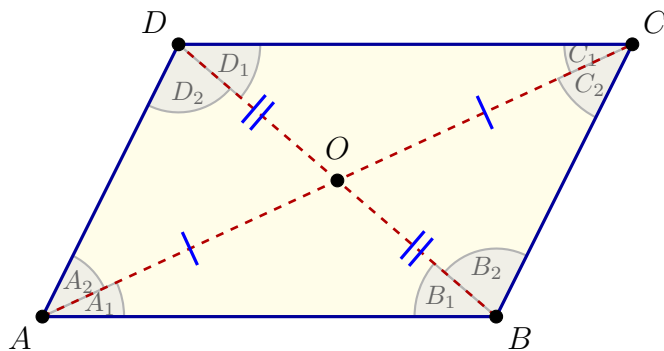
Húzzuk be a paralelogramma BD átlóját! Ez az átló az alakzatot két háromszögre bontja: az ABD_{Δ} -re és a CDB_{Δ} -re.

- A BD oldal mindkét háromszögnek közös oldala ($BD \equiv BD$).
- Mivel $AB \parallel DC$ és a BD átló egy metsző (szelő) egyenes, ezért a keletkező *belső váltószögek* kongruensek: $\hat{B}_1 \equiv \hat{D}_1$.
- Hasonlóan, mivel $AD \parallel BC$, a másik pár váltószög is kongruens: $\hat{B}_2 \equiv \hat{D}_2$.

Mivel a két háromszög egy oldala és a rajta fekvő két szög megegyezik, a két háromszög kongruens ($ABD_{\Delta} \equiv CDB_{\Delta}$). Ebből a szög-oldal-szög (sz.o.sz.) eset alapján egyenesen következik, hogy a megfelelő oldalaik és szögeik is kongruensek: $AB \equiv DC$, $AD \equiv BC$, illetve az A és C csúcsoknál lévő teljes szögek is kongruensek ($\hat{A} \equiv \hat{C}$).

4. tulajdonság bizonyítása (Az átlók felezik egymást):

Legyen a két átló (AC és BD) metszéspontja az O pont. Vizsgáljuk meg az AOB_{Δ} és a COD_{Δ} háromszögeket! Már tudjuk, hogy a szemközti oldalak kongruensek: $AB \equiv DC$. A párhuzamosság miatti belső váltószögek is kongruensek az A és C ($\hat{A}_1 \equiv \hat{C}_1$), valamint a B és D csúcsoknál ($\hat{B}_1 \equiv \hat{D}_1$). Így a két kis háromszög szintén kongruens ($AOB_{\Delta} \equiv COD_{\Delta}$). Ebből következik, hogy a megfelelő oldalaik megegyeznek: $AO \equiv OC$ és $BO \equiv OD$, azaz az O pont mindkét átlónak a felezőpontja!



Fordított tételek (A paralelogramma felismerése)

A geometria szépsége, hogy a fenti logikai lépések megfordíthatók. Kaptunk egy eszköztárat, amivel egy ismeretlen négyszögről bizonyítani tudjuk, hogy az valójában egy paralelogramma.

Tétel: Mikor paralelogramma egy négyszög?

Egy tetszőleges konvex négyszög **paralelogramma**, ha az alábbi feltételek *bármelyike* teljesül rá:

1. A szemközti oldalai páronként kongruensek.
2. A szemközti szögei páronként kongruensek.
3. A két átlója felezi egymást.
4. **Elegendő feltétel:** Ha van egy olyan szemközti oldalpárja, amely *egyszerre párhuzamos és kongruens* ($AB \parallel DC$ és $AB \equiv DC$), akkor az alakzat biztosan paralelogramma.

Gyakorlati alkalmazások

1. Feladat (Háromszög súlyvonalának meghosszabbítása):

Adott egy ABC háromszög. Az AC oldal felezőpontja legyen az O pont. Húzzuk meg a BO súlyvonalat, majd hosszabbítsuk meg az O ponton túl egy D pontig úgy, hogy $OD \equiv BO$ teljesüljön!

- a) Bizonyítsuk be, hogy az $ABCD$ négyszög paralelogramma!
- b) Igazoljuk, hogy a BO súlyvonal hossza kisebb, mint az AB és BC oldalak összegének a fele: $BO < \frac{AB+BC}{2}$!

Megoldás:

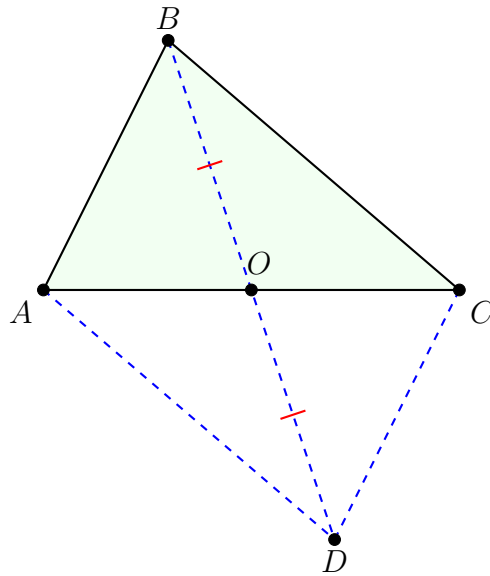
- a) Mivel O az AC szakasz felezőpontja, tudjuk, hogy $AO \equiv OC$. A feladat feltétele szerint a meghosszabbítás miatt $BO \equiv OD$. Ezek az állítások pont azt jelentik, hogy az $ABCD$ négyszögben az átlók (AC és BD) felezik egymást. Ez a tulajdonság a fordított tétel alapján biztosítja, hogy $ABCD$ egy paralelogramma.
- b) Egy háromszögben bármely oldal hossza kisebb a másik két oldal hosszának összegénél (háromszög-egyenlőtlenség). Alkalmazzuk ezt az $ABD\triangle$ -re:

$$BD < AB + AD$$

Mivel a paralelogramma szemközti oldalai kongruensek, $AD \equiv BC$ (hosszuk egyenlő). A BD átló pedig pontosan a BO súlyvonal kétszerese ($2 \cdot BO$). Helyettesítsük be ezeket:

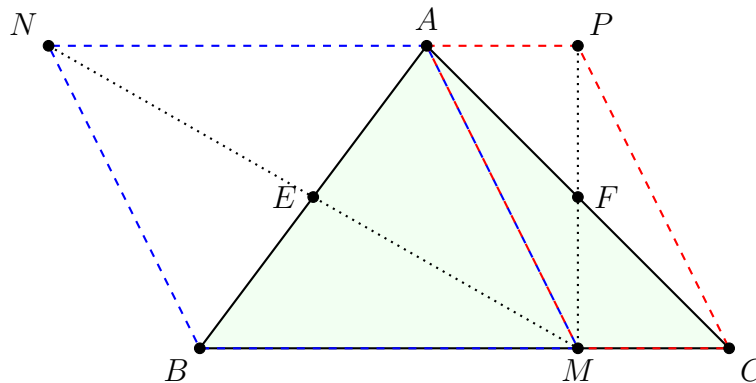
$$2 \cdot BO < AB + BC \quad / : 2 \implies BO < \frac{AB + BC}{2}.$$

Az állítást igazoltuk.



2. Feladat (Középpontos tükrözés a háromszög oldalain):

Vegyen fel egy tetszőleges M pontot az ABC háromszög BC oldalán. Tükrözzük ezt az M pontot az AB oldal E felezőpontjára (így kapjuk az N pontot), valamint az AC oldal F felezőpontjára (így kapjuk a P pontot). Bizonyítsuk be, hogy az N , A és P pontok egy egyenesre esnek (kollineárisak)!



Megoldás:

A középpontos tükrözés miatt az E pont felezi az NM szakaszt ($NE \equiv EM$), továbbá tudjuk, hogy az E pont felezi az AB oldalt is ($AE \equiv EB$). Ez azt jelenti, hogy az $AMBN$ négyszög átlói felezik egymást, tehát ez az alakzat egy **paralelogramma**. Emiatt a szemközti oldalaik párhuzamosak: $AN \parallel BM$, vagyis $AN \parallel BC$.

Ugyanezzel a logikával az F pont felezi a PM és az AC szakaszokat is, így az $AMCP$ négyszög is egy **paralelogramma**. Ebből következik, hogy $AP \parallel MC$, azaz $AP \parallel BC$.

Mivel az AN egyenes és az AP egyenes is párhuzamos a BC oldallal, ráadásul mindkettő áthalad a közös A csúcson, a párhuzamossági axióma értelmében a két egyenes egybeesik. **Ezért az N , A és P pontok valóban egyetlen közös egyenesen helyezkednek el.**

3. A háromszög középvonala

Vizsgáljuk meg, mi történik, ha egy háromszög oldalait elfelezzük, és ezeket a felezőpontokat vonalakkal összekötjük! Ezt a nagyon fontos geometriai elemet nevezzük a háromszög középvonalának.

Definíció: A középvonal fogalma

Amikor egy háromszög tetszőleges két oldalának felezőpontját egy egyenes szakasszal összekötjük, ezt a kapott szakaszt a **háromszög középvonalának** nevezzük. Mivel egy háromszögnek három oldala van, így összesen három különböző középvonal rajzolható be, amelyek együttesen egy belső, kisebb háromszöget alkotnak.

Tétel: A középvonal tulajdonságai

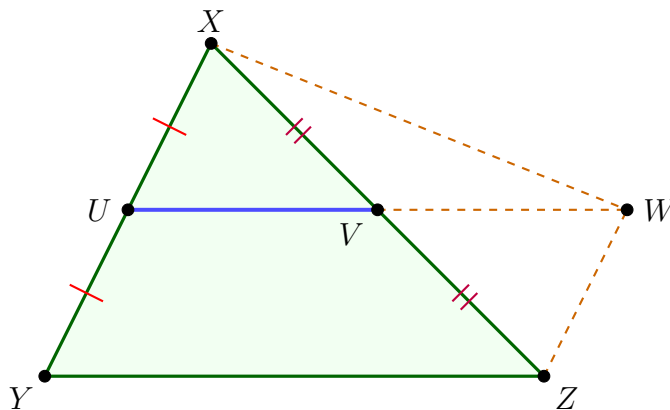
A háromszög bármely középvonalára igaz a következő két alapvető állítás:

1. Mindig **párhuzamos** a háromszög harmadik (vele szemben fekvő) oldalával.
2. A hossza hajszálpontosan megegyezik ennek a harmadik oldal **hosszána**k a felével.

A tétel bizonyítása

Kiindulási feltételek: Adott egy XYZ háromszög. Jelöljük az XY oldal felezőpontját U -val, az XZ oldal felezőpontját pedig V -vel. (Ebből következik, hogy $XU \equiv UY$ és $XV \equiv VZ$).

Amit bizonyítani szeretnénk: 1) $UV \parallel YZ$ és 2) $UV = \frac{YZ}{2}$.



A logikai levezetés: Húzzuk meg az UV szakaszt, majd hosszabbítsuk meg a V ponton túl egy új W pontig úgy, hogy a megtoldott szakasz hossza megegyezzen az eredetiével (vagyis $UV \equiv VW$).

Tekintsük most az $XUZW$ négyszöget! Ennek a négyszögnek az átlói az XZ és az UW szakaszok, amelyek a V pontban metszik egymást. A kiindulási feltételek miatt tudjuk, hogy V felezi az XZ szakaszt ($XV \equiv VZ$), a szerkesztésünk miatt pedig felezi az UW szakaszt is ($UV \equiv VW$). Mivel egy olyan négyszöget kaptunk, amelynek az átlói kölcsönösen felezik egymást, **az $XUZW$ alakzat egy paralelogramma**.

A paralelogramma tulajdonságaiból adódik, hogy a szemkötti oldalai párhuzamosak és egyenlő hosszúak: $ZW \parallel XU$ és $ZW \equiv XU$. Tudjuk azonban, hogy az U pont az XY oldal felezőpontja, tehát $XU \equiv UY$. Ezt behelyettesítve azt kapjuk, hogy $ZW \equiv UY$, továbbá mivel X, U, Y egyetlen egyenesen helyezkednek el, $ZW \parallel UY$ is igaz.

Ha egy négyszög ($UYZW$) két szemközti oldala (ZW és UY) egyszerre párhuzamos és egyenlő hosszúságú, akkor az szintén egy **paralelogramma**. Ebből rögtön következik az igazolandó tétel első fele: az UW oldal párhuzamos az YZ oldallal, tehát a rajta fekvő UV **középvonal is párhuzamos az YZ oldallal** ($UV \parallel YZ$).

A hosszúság bizonyításához tudjuk, hogy a paralelogramma szemközti oldalai miatt $UW = YZ$. Mivel U, V, W egy egyenesre esik és $UV = VW$, az UW hossza éppen $2 \cdot UV$. Tehát $2 \cdot UV = YZ$, amit átrendezve megkapjuk a végeredményt: $UV = \frac{YZ}{2}$. Ezzel a tételt beláttuk.

Fordított tételek

Ahogy a paralelogrammáknál, úgy a középvonal esetében is felírhatjuk az állítások fordítottját, melyek segítenek a feladatmegoldások során:

A középvonal tételének megfordításai

1. **A párhuzamossági feltétel:** Ha egy egyenes áthalad egy háromszög egyik oldalának felezőpontján, és párhuzamos egy másik oldallal, akkor az biztosan a harmadik oldal felezőpontjában fogja metszeni a háromszöget.
2. **A fele-hossz feltétel:** Ha egy, a háromszög két oldalát összekötő szakasz párhuzamos a harmadik oldallal és a hossza pont a fele annak, akkor ez a szakasz garantáltan a háromszög középvonala (azaz a végpontjai felezőpontok).

Alkalmazás: A háromszög súlypontja

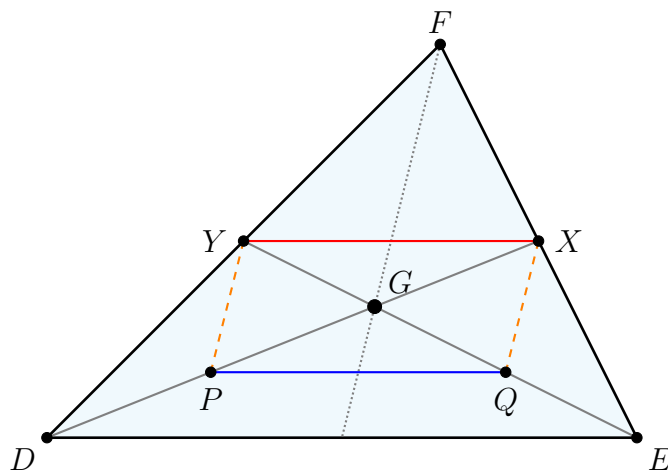
A középvonalhoz kapcsolódó logikával gyönyörűen bizonyítható a geometria egyik legfontosabb alaptétele, a súlypont létezése. A háromszög csúcsait a szemközti oldalak felezőpontjaival összekötő szakaszokat **súlyvonalaknak** nevezzük.

Tétel: A súlypont

Bármely háromszög három súlyvonala egyetlen közös pontban metszi egymást. Ezt a pontot a háromszög **súlypontjának** hívjuk. A súlypont különleges tulajdonsága, hogy mindegyik súlyvonalat **2:1 arányban** osztja fel, oly módon, hogy a csúctól a súlypontig tartó szakasz kétszer olyan hosszú, mint a súlyponttól az oldal felezőpontjáig tartó szakasz.

Bizonyítás (A középvonalak segítségével):

Tekintsünk egy DEF háromszöget! Legyen a DE oldal felezőpontja Z , az EF oldalé X , az FD oldalé pedig Y . A három súlyvonal tehát: DX , EY és FZ . Kezdeként vegyünk csak kettőt: metssze egymást az EY és a DX súlyvonal egy G (súly)pontban. Azt kell bizonyítanunk, hogy az G pont 2:1 arányban osztja ezeket.



A gondolatmenet: Jelöljük ki a G szakasz felezőpontját P -vel, és az EG szakasz felezőpontját Q -val.

Vizsgáljuk meg az eredeti DEF háromszöget! Az YX szakasz pontosan összeköti két oldal felezőpontját, így az a DEF háromszög középvonala. A tételünk alapján tudjuk, hogy $YX \parallel DE$ és $YX = \frac{DE}{2}$.

Most tekintsük az GDE (alsó, kisebb) háromszöget! Ebben a háromszögben a PQ szakasz köti össze a DG és EG oldalak felezőpontjait, így a PQ szakasz az GDE háromszög középvonala. Emiatt ez is párhuzamos az alappal és fele akkora: $PQ \parallel DE$ és $PQ = \frac{DE}{2}$.

Mivel az YX és a PQ szakasz is párhuzamos a DE oldallal és mindkettő pontosan fele olyan hosszú, mint a DE oldal, egymással is azonosak kell legyenek! Tehát $YX \parallel PQ$ és $YX \equiv PQ$. Ebből következik, hogy a $PYXQ$ négyszög egy **paralelogramma**.

A paralelogramma átlói felezi egymást, tehát a metszéspontjuk (G) felezi a PX és az YQ átlókat. Ebből adódik, hogy $PG \equiv GX$ és $YG \equiv GQ$. Mivel kezdetben a P pontot a DG szakasz felezőpontjának vettük, $DP \equiv PG$. Ezt összerakva:

$$DP \equiv PG \equiv GX \implies DG = 2 \cdot GX$$

Ezzel bebizonyítottuk a 2:1 arányt! Teljesen megegyező logikával (másik két súlyvonalat kiválasztva) belátható, hogy a harmadik súlyvonal is ugyanezen az G ponton halad át, és azt is ugyanez a 2:1 arány jellemzi.

4. Sajátos paralelogrammák

A paralelogrammák családján belül megkülönböztetünk olyan különleges alakzatokat, amelyek további egyedi tulajdonságokkal rendelkeznek.

A téglalap

Definíció: A téglalap

A téglalap olyan paralelogramma, amelynek legalább egy belső szöge derékszög (90°). Mivel a paralelogramma szemkötti szögei egyenlők, a szomszédosak pedig kiegészítő szögek, ebből egyenesen következik, hogy a téglalap mind a négy szöge derékszög. Természetesen a téglalap is "örökli" a paralelogrammák összes alaptulajdonságát.

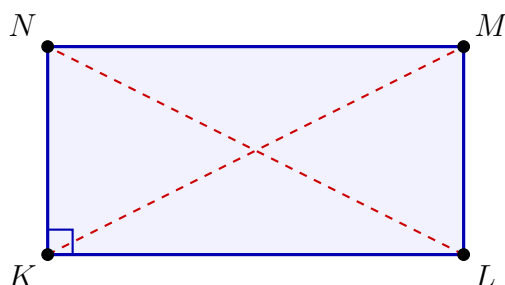
Tétel: A téglalap átlói

Egy téglalap két átlója mindig pontosan ugyanolyan hosszú (kongruensek).

A tétel igazolása:

Vizsgáljunk meg egy $KLMN$ téglalapot! Húzzuk be a KM és az LN átlókat. Emeljünk ki két háromszöget: a KLM_{Δ} -et és az LKN_{Δ} -et. Ezekben a háromszögekben a KL oldal közös. A paralelogramma tulajdonság miatt a szemközti oldalak egyenlők, vagyis $LM \equiv KN$. Továbbá mindkét háromszög derékszögű a L és K csúcsoknál. Mivel a két háromszög két oldala és a közbezárt szög (a derékszög) megegyezik, a két háromszög egybevágó ($KLM_{\Delta} \equiv LKN_{\Delta}$). Az egybevágóságból azonnal adódik, hogy a harmadik oldalai, vagyis az átlók is egyenlők: $KM \equiv LN$.

A tétel meg is fordítható, és a kettőt együtt egy ekvivalencia-állítássá gyúrhatjuk össze: **Egy paralelogramma pontosan akkor (akkor és csakis akkor) téglalap, ha az átlóinak hossza megegyezik.**



A rombusz

Definíció: A rombusz

A rombusz egy olyan speciális paralelogramma, amelynek két szomszédos oldala azonos hosszúságú (kongruens). Mivel a paralelogramma szemközti oldalai is egyenlők, ebből az következik, hogy a rombusz **mind a négy oldala megegyezik egymással**.

Tételek a rombusz átlóiról

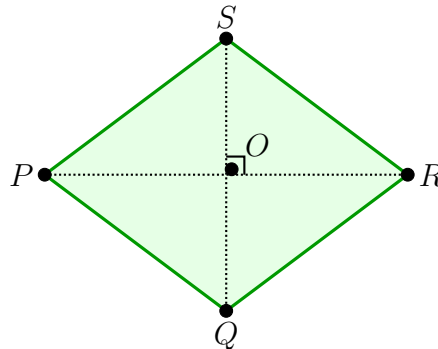
A rombusznak két nagyon fontos, az átlóira vonatkozó tulajdonsága van:

1. Az átlói **merőlegesek** egymásra (derékszögben metszik egymást).
2. Az átlói egyben az alakzat belső szögeinek **szögfelezői** is.

A tételek igazolása:

Legyen adott egy $PQRS$ rombusz, amelynek átlói az O pontban metszik egymást. Mivel a rombusz egyben paralelogramma is, az átlói felezik egymást, vagyis a PO és az OR szakaszok egyenlők ($PO \equiv OR$). Tekintsük a PQR_{Δ} -et! Mivel a rombusz minden oldala egyenlő, $PQ \equiv QR$, tehát ez a háromszög **egyenlő szárú**. Az egyenlő szárú háromszögeknél az alaphoz tartozó súlyvonal (jelen esetben a QO szakasz) egyben a háromszög **magasságvonala** is. Ha magasságvonal, akkor merőleges az alapra (PR -re), amivel beláttuk az első tételt: az átlók derékszöget zárnak be. Ugyanebből az egyenlő szárú háromszögből az is következik, hogy a súlyvonal egyben **szögfelező** is, így a QO szakasz felezi a Q csúcsnál lévő szöget. Ezzel a második tételt is igazoltuk.

A tétel megfordítása itt is érvényes: **Ha egy paralelogramma átlói merőlegesek egymásra, vagy ha az átlói felezik a szögeket, akkor az a paralelogramma biztosan rombusz.**



A négyzet

Definíció: A négyzet

A négyzet tulajdonképpen a téglalap és a rombusz "gyermeke": egy olyan paralelogramma, amely **egyszerre téglalap és rombusz**.

Mivel egyesíti e két alakzat jellemzőit, a négyzet az alábbi **tulajdonságokkal** bír:

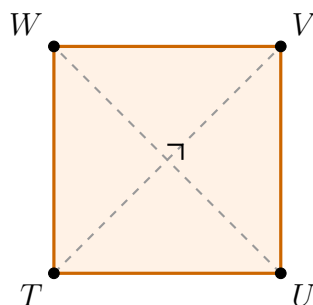
- Minden oldala kongruens (egyenlő hosszúságú).
- Minden belső szöge derékszög (90°).
- Átlói felezik egymást, kongruensek (egyenlő hosszúak), merőlegesek egymásra, és egyben szögfelezők is.

Tétel: Mikor négyzet egy paralelogramma?

Egy paralelogramma akkor és csak akkor négyzet, ha az átlói egyenlő hosszúak **és** merőlegesek egymásra.

A tétel bizonyítási logikája (kétirányú):

- **Odafelé ($\Rightarrow$):** Ha egy alakzat négyzet, akkor definíció szerint téglalap is (tehát átlói egyenlők), és rombusz is (tehát átlói merőlegesek).
- **Visszafelé ($\Leftarrow$):** Ha egy paralelogramma átlói egyenlők, akkor az egy téglalap. Ha emellett az átlók merőlegesek is egymásra, akkor ez egy rombusz is. Egy alakzat, ami téglalap és rombusz is egyben, az pontosan a négyzet.



5. A trapéz

A négyszögek egy másik rendkívül fontos családját alkotják a trapézok.

Definíció: A trapéz fogalma

A trapéz egy olyan négyszög, amelynek pontosan két szemben fekvő oldala párhuzamos egymással, míg a másik két oldala nem párhuzamos.

Egy tetszőleges $WXYZ$ trapéz esetén, ahol $WX \parallel ZY$, az alábbi elnevezéseket használjuk:

- A párhuzamos oldalakat a trapéz **alapjainak** nevezzük.
- A hosszabbik párhuzamos oldal (például a WX szakasz) a **nagyalap**.
- A rövidebbik párhuzamos oldal (a ZY szakasz) a **kisalap**.
- A két nem párhuzamos oldalt (WZ és XY) a trapéz **szárainak** hívjuk.

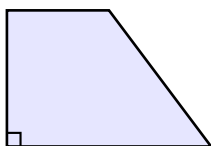
A trapézok osztályozása

Az oldalak és a szögek tulajdonságai alapján a trapézokat három fő kategóriába sorolhatjuk:

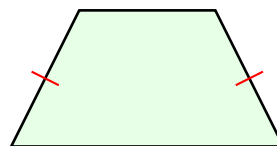
- **1. Általános trapéz:** A két szára különböző hosszúságú, és a belső szögei között egyáltalán nincs derékszög.
- **2. Derékszögű trapéz:** Különlegessége, hogy az egyik szára pontosan merőleges a két párhuzamos alapra.
- **3. Egyenlő szárú trapéz:** Olyan trapéz, amelynek a két nem párhuzamos szára tökéletesen megegyező hosszúságú (kongruens).



1. Általános



2. Derékszögű



3. Egyenlő szárú

Az egyenlő szárú trapéz tulajdonságai

Tételek az egyenlő szárú trapézzal

Minden egyenlő szárú trapézzal maradéktalanul érvényesek a következő tulajdonságok:

1. Az azonos alapon fekvő belső szögek mindig kongruensek egymással.
2. A trapéz két átlója teljesen azonos hosszúságú (kongruens).

Az 1. tulajdonság (Szögek) bizonyítása:

Vegyünk egy $PQRS$ egyenlő szárú trapézt, ahol $PQ \parallel SR$ és a két szár egyenlő ($PS \equiv QR$). Húzzunk a felső S és R csúcsokból magasságvonalakat az alsó PQ alapra. Legyenek a talppontok U és V . Ekkor középen egy $SUVR$ téglalap jön létre, amiből következik, hogy a két magasság egyenlő: $SU \equiv RV$. Vizsgáljuk meg a két szélén kialakult derékszögű háromszöget

(PSU_{Δ} és QRV_{Δ})! Mivel a trapéz egyenlő szárú, az átfogóik egyenlők ($PS \equiv QR$). Mivel egy befogójuk (a magasság) és az átfogójuk is megegyezik, a derékszögű háromszögek egybevágósági tétele alapján a két háromszög kongruens ($PSU_{\Delta} \equiv QRV_{\Delta}$). Ebből egyenesen következik, hogy a P és Q csúcsoknál fekvő szögek megegyeznek.

A 2. tulajdonság (Átlók) bizonyítása:

Most húzzuk be a PR és az SQ átlókat! Tekintsük a PQS_{Δ} és a QPR_{Δ} háromszögeket. Ezekben a PQ alap közös. A feltételek miatt a két szár egyenlő ($PS \equiv QR$). Az előző bizonyításban már beláttuk, hogy az alapon fekvő szögek is egyenlők ($\hat{P} \equiv \hat{Q}$). Mivel két oldaluk és az általuk közbezárt szög megegyezik, a szög-oldal-szög (sz.o.sz.) eset értelmében a két háromszög kongruens ($PQS_{\Delta} \equiv QPR_{\Delta}$). Ebből következik, hogy a harmadik oldaluk, azaz a PR és az SQ átlók is pontosan egyenlők ($PR \equiv SQ$).

A fordított tételek

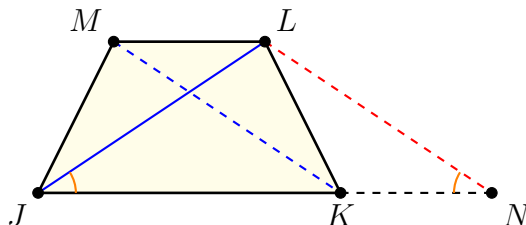
A fenti tulajdonságok megfordítva is igazak, és kiválóan alkalmasak arra, hogy egy ismeretlen trapézzal kapcsolatban megbizonyítsuk, hogy az egyenlő szárú.

Fordított tételek

1. Ha egy tetszőleges trapézban az egyazon alapon fekvő belső szögek kongruensek, akkor az a trapéz biztosan egyenlő szárú.
2. Ha egy trapéz két átlója kongruens egymással, akkor a trapéz egyenlő szárú.

A 2. fordított tétel bravúros bizonyítása:

Ez a bizonyítás egy rendkívül elegáns geometriai szerkesztésen alapul. Adott egy $JKLM$ trapéz, amelyről egyelőre csak annyit tudunk, hogy a két átlója egyenlő ($JL \equiv MK$), és azt akarjuk belátni, hogy a szárak is egyenlők ($JM \equiv KL$).



Lépések a bizonyításhoz:

1. Hosszabbítsuk meg a JK nyalapot a K ponton túl.
2. Az L csúcson keresztül húzzunk egy egyenest, amely párhuzamos az MK átlóval, és metsze a nyalapot meghosszabbítását az N pontban.
3. Ezzel létrehoztunk egy $MKNL$ négyszöget. Mivel az ML és a KN szakaszok a trapéz alapjai miatt eleve párhuzamosak, a szerkesztésünk miatt pedig $MK \parallel LN$, így a **$MKNL$ alakzat egy paralelogramma**.
4. A paralelogramma szemköztli oldalai egyenlők, így $MK \equiv LN$.
5. A kiindulási feltételünk az volt, hogy a trapéz két átlója egyenlő, vagyis $JL \equiv MK$. Ezt összekapcsolva az előző lépéssel azt kapjuk, hogy $JL \equiv LN$.
6. Emiatt a nagy JLN_{Δ} háromszög **egyenlő szárú** lett. Az egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögei egyenlők, tehát az $\hat{N}$ szög és a $\hat{J}$ -nél lévő szög egyenlő.

7. Mivel a MK és az LN egyenesek párhuzamosak, a JN pedig egy szelő, az MK és a JN által bezárt szög pontosan megegyezik az $\hat{N}$ szöggel (egyállású szögek).
8. Ebből következik, hogy a két belső, átlók által alkotott nagy háromszögben (JMK_{Δ} és KJL_{Δ}) két oldal és a közbezárt szög megegyezik, így a háromszögek egybevágóak. Ebből pedig logikusan következik, hogy a szárak egyenlők: $JM \equiv KL$. Az állítást igazoltuk.

6. A trapéz középvonala

Definíció: A középvonal fogalma

A trapéz két nem párhuzamos oldalának (tehát a szárainak) felezőpontjait összekötő egyenes szakaszt a trapéz középvonalának hívjuk.

Tétel: A középvonal tulajdonságai

Egy tetszőleges trapéz középvonalára az alábbi két állítás érvényes:

- A középvonal mindig párhuzamos a trapéz két alapjával.
- A középvonal hossza pontosan megegyezik a két alap hosszának számtani közepével (félösszegével). Képlettel felírva: $Középvonal = \frac{Nagyalap + Kisalap}{2}$.

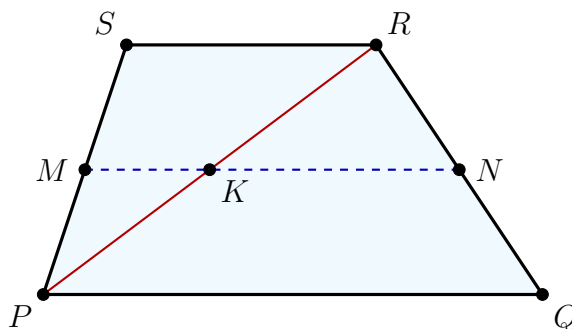
A tétel igazolása:

Tekintsünk egy $PQRS$ trapézt, ahol a PQ és SR szakaszok a párhuzamos alapok, az M és N pontok pedig a PS és QR szárak felezőpontjai. A vizsgált középvonal tehát az MN szakasz. Húzzuk be a PR átlót, és jelöljük ki rajta a K felezőpontot.

Vizsgáljuk meg a PSR_{Δ} -et! Ebben a háromszögben az MK szakasz pontosan két oldal felezőpontját köti össze, így az a háromszög középvonala. Ebből kifolyólag $MK \parallel SR$, és a hossza $MK = \frac{SR}{2}$. Hasonló logikával, a PQR_{Δ} -ben a KN szakasz szintén egy háromszög-középvonal, ami miatt $KN \parallel PQ$, és $KN = \frac{PQ}{2}$.

Mivel a trapéz definíciója szerint az alapok párhuzamosak ($SR \parallel PQ$), ezért az MK és a KN szakaszok is párhuzamosak a PQ alappal. A párhuzamossági axióma kimondja, hogy egy adott pontból (jelen esetben a K pontból) egy adott egyeneshez csakis egyetlen párhuzamos egyenes húzható. Ez azt jelenti, hogy az M, K és N pontok kötelezően egyetlen közös egyenesre esnek (kollineárisak), ezáltal az egybefüggő MN középvonal párhuzamos az alapokkal ($MN \parallel PQ$).

A hosszakra vonatkozóan: mivel az M, K és N pontok egyetlen egyenest alkotnak, az MN szakasz hossza megegyezik a két rész összeadásával ($MN = MK + KN$). Behelyettesítve a már levezetett értékeket: $MN = \frac{SR}{2} + \frac{PQ}{2} = \frac{SR+PQ}{2}$, amivel a tételt sikeresen beláttuk.



Gyakorló feladat: A középvonal és az átlók metszete

Vegyünk egy $KLMN$ trapézt, melynek párhuzamos alapjai a KL és az NM szakaszok. Legyen az U pont a KN szár, a V pont pedig az LM szár felezőpontja, így az UV szakasz a trapéz középvonala. Húzzuk be mindkét átlót (KM és LN). Jelöljük a középvonal és az átlók metszéspontjait: az UV szakasz a KM átlót az X pontban, az LN átlót pedig az Y pontban metszi.

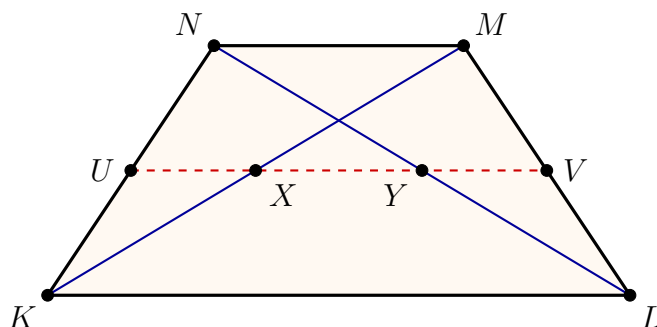
Bizonyítsuk be a következő két állítást:

1. Az átlók és a szárak közötti középvonal-darabok egyenlők a kisalap felével: $UX = YV = \frac{NM}{2}$.
2. Az átlók közötti szakasz hossza az alapok különbségének a fele: $XY = \frac{KL - NM}{2}$.

A bizonyítás menete:

1. állítás igazolása: Nézzük a KNM_{Δ} -et (ahol NM a kisalap)! Az UX szakasz ebben a háromszögben egy középvonal, mivel áthalad az egyik oldal felezőpontján és definíció szerint párhuzamos az NM alappal. Ennek megfelelően az értéke: $UX = \frac{NM}{2}$. Ugyanezt a gondolatmenetet alkalmazva az $LN M_{\Delta}$ -ben, az YV szakasz szintén középvonalként viselkedik, tehát $YV = \frac{NM}{2}$. A kettőt összevetve látható, hogy $UX = YV = \frac{NM}{2}$.

2. állítás igazolása: Most vizsgáljuk meg a nagy NKL_{Δ} -et (amelynek alapja a KL nagyalap)! Az UY szakasz ennek a háromszögnek a középvonala, így hossza $UY = \frac{KL}{2}$. A keresett XY (átlók közötti) szakasz hossza felírható két ismert szakasz különbségeként: $XY = UY - UX$. Helyettesítsük be a már kiszámolt értékeket: $XY = \frac{KL}{2} - \frac{NM}{2} = \frac{KL - NM}{2}$. Ezzel az összefüggést sikeresen levezettük.



7. Síkidomok területe

Amikor egy zárt vonal (például egy sokszög kerülete) által határolt síkrészt vizsgálunk, gyakran kíváncsiak vagyunk annak kiterjedésére, nagyságára. A síkidomok belső tartományának ezt a számszerűsíthető méretét nevezzük a síkidom **területének** (jelölése általában T).

A mérésekhez egységnyi területeket használunk. Az alaplómérték az 1 méter oldalhosszúságú négyzet területe, azaz az 1 m^2 (négyzetméter). A korábbi tanulmányokból ismert szabályok alapján ennek váltószámai a következők: $1 \text{ m}^2 = 100 \text{ dm}^2$, $1 \text{ dm}^2 = 100 \text{ cm}^2$, és így tovább, illetve felfelé $1 \text{ dam}^2 = 100 \text{ m}^2$, $1 \text{ hm}^2 = 100 \text{ dam}^2$.

A következőkben levezetjük a legfontosabb sokszögek területképleteit.

A téglalap és a négyzet területe

Képzeljünk el egy téglalapot, amelynek oldalai 6 cm és 4 cm hosszúak. Ha ezt a síkidomot felbontjuk 1 cm oldalú (1 cm^2 területű) egységnégyzetekre, akkor egy 6 oszlopból és 4 sorból álló rácsot kapunk. A kis négyzetek száma összesen $6 \cdot 4 = 24$ darab, így a terület 24 cm^2 lesz.

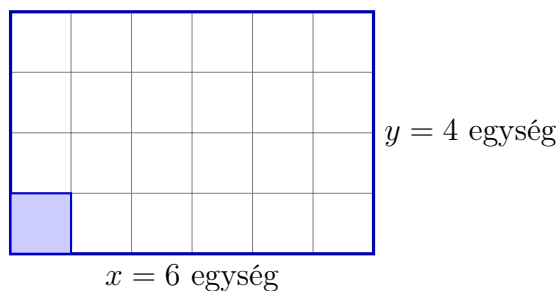
Tételek: Téglalap és négyzet területe

Általánosítva a fenti megfigyelést, egy x hosszúságú és y szélességű **téglalap területe** a két szomszédos oldal szorzata:

$$T = x \cdot y$$

Mivel a **négyzet** egy olyan speciális téglalap, amelynek minden oldala egyenlő (legyen ez x), a területe az oldalhossz négyzetével egyezik meg:

$$T = x^2$$



A háromszög területe

Vizsgáljunk meg egy tetszőleges EFG háromszöget, amelynek alapja e , a hozzá tartozó magassága pedig m_e . Ha a háromszöget kiegészítjük egy befoglaló téglalappá úgy, hogy a téglalap oldalai az e alappal és az m_e magassággal egyezzenek meg, egy érdekes összefüggést fedezhetünk fel.

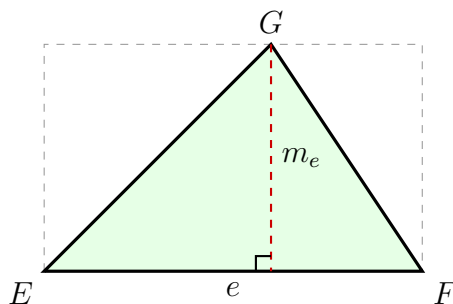
A magasságvonal a háromszöget két kisebb derékszögű háromszögre bontja, és ezek a részek pontosan feleakkorák, mint a befoglaló téglalap rájuk eső fele. Így a teljes EFG háromszög területe pontosan a fele lesz a téglalap területének.

Tétel: A háromszög területe

A háromszög területe kiszámítható úgy, hogy kiválasztjuk bármelyik oldalát, megszorozzuk a hozzá tartozó magasság hosszával, majd a szorzatot elosztjuk kettővel:

$$T = \frac{e \cdot m_e}{2}$$

Ez a képlet egyaránt igaz hegyesszögű, derékszögű és tompaszögű háromszögekre is.



A paralelogramma területe

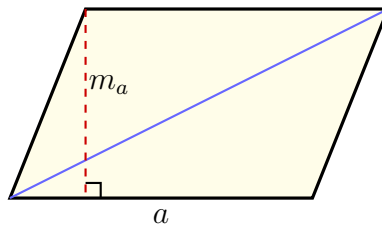
Adott egy $KLMN$ paralelogramma. Húzzuk be az egyik átlóját (például az LN szakaszt)! Ez az átló a paralelogrammát két tökéletesen egybevágó (kongruens) háromszögre osztja fel. Mivel

tudjuk, hogy egy ilyen háromszög területe az oldal és a magasság szorzatának a fele ($\frac{a \cdot m_a}{2}$), a két háromszög együttes területe ennek pontosan a kétszerese lesz.

Tétel: A paralelogramma területe

Egy paralelogramma területe megkapható, ha az egyik oldalának hosszát megszorozzuk a hozzá tartozó (rá merőleges) magasság hosszával:

$$T = 2 \cdot \frac{a \cdot m_a}{2} = a \cdot m_a$$



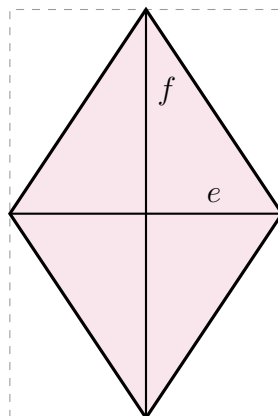
A rombusz területe

Mivel a rombusz egy speciális paralelogramma, kiszámíthatjuk a területét az oldal és a magasság szorzataként is. Azonban az átlók ismeretében van egy másik módszer is. Szerkesszünk a rombusz köré egy téglalapot úgy, hogy a téglalap oldalai áthaladjanak a rombusz csúcsain, és párhuzamosak legyenek a rombusz átlóival. Ez a téglalap fel van osztva 8 darab apró, egybevágó derékszögű háromszögre. A rombusz ezek közül pontosan 4-et tartalmaz, ami azt jelenti, hogy a rombusz területe egzaktul a fele a külső téglalap területének.

Tétel: A rombusz területe az átlókkal

Mivel a befoglaló téglalap oldalai megegyeznek a rombusz két átlójával (jelöljük őket e -vel és f -fel), a rombusz területe az átlók szorzatának a fele:

$$T = \frac{e \cdot f}{2}$$



A trapéz területe

A trapéz területének levezetése egy nagyon okos szerkesztési trükkön alapul. Vegyünk egy trapézt, amelynek alapjai c (nagyalap) és d (kisalap), magassága pedig m . Készítsünk erről a

trapézról egy pontos (kongruens) másolatot, fordítsuk fejjel lefelé, és illesszük hozzá az eredeti trapéz egyik szárához!

A két trapéz együttesen egy nagy paralelogrammát alkot. Ennek az új paralelogrammának az alapja a két trapéz-alap összege $(c+d)$ lesz, a magassága pedig változatlanul m marad. Mivel az eredeti trapéz ennek a nagy alakzatnak pontosan a felét teszi ki, a területét a következőképpen számoljuk:

Tétel: A trapéz területe

A trapéz területe megegyezik a párhuzamos alapok összegének és a magasságnak a szorzatával, osztva kettővel:

$$T = \frac{(c + d) \cdot m}{2}$$

