

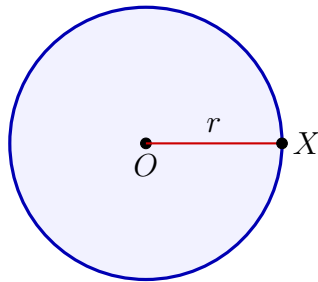
A kör

7. osztály

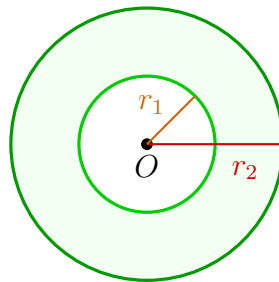
1. A kör alapfogalmai

Definíciók és alapvető elemek

A síkban egy adott ponttól egyenlő, meghatározott távolságra elhelyezkedő pontok összességét körnek nevezzük. Jelöljük a fix középpontot O -val, az állandó távolságot (sugarat) pedig s -sel. A körvonal matematikai jelölése erre utalva $C(O, R)$. A körvonal a teljes sík területét két további halmazzra bontja: a körön belüli részre (belső tartomány, jelölése Int), illetve a körön kívüli részre (külső tartomány, jelölése Ext).

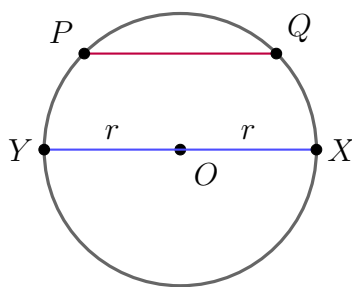


Két kör egybevágónak (kongruensnek) tekinthető, amennyiben a sugaraik hossza pontosan megegyezik. Koncentrikus körökről beszélünk akkor, ha a körök középpontja közös, csupán a sugaraik mértéke eltérő.

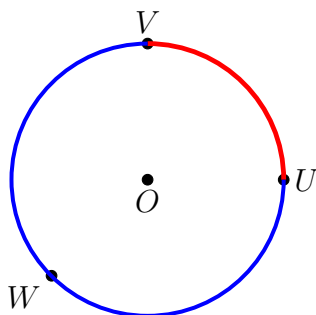


Szakaszok és ívek a körben

Azt az egyenes szakaszt, amely a körvonal két tetszőleges pontját köti össze, húrnak nevezzük. Ha egy húr pontosan áthalad a kör O középpontján, akkor annak speciális neve van: ez az átmérő. Az átmérő hossza mindig a sugár kétszeresét teszi ki ($d = 2 \cdot r$). Az átmérő két legszélső végpontját egymással átmérősen ellentétes pontoknak hívjuk.



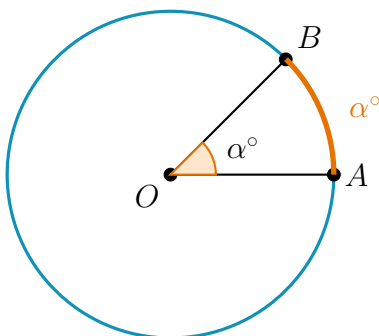
A körvonal bármely két pontja közötti folytonos szakaszt körívnek hívjuk. Két pont általában egy rövidebb és egy hosszabb ívre osztja a kör kerületét. A hosszabbik körív (vagy ha a jelölés nem egyértelmű) azonosítására gyakran egy harmadik köztes pontot is bevonunk, hogy az irány jól meghatározható legyen.



A középponti szög és az ívmérték

Azt a szöget, amelynek a csúcspontja pontosan a kör középpontjában található, középponti szögnek hívjuk. A szög szárait a kör középpontjából kiinduló sugarak (félegyenesek) alkotják. Ezek a szögszárak egy meghatározott körívet zárnak közre a körvonalon. A körívek nagyságát a középponti szögekhez logikusan illeszkedve, szintén fokban fejezzük ki.

- Abban az esetben, ha a középponti szög mértéke legfeljebb 180° , a közbezárt körív fokmértéke pontosan megegyezik a szög mértékével (például α°).
- Ha a szög nagyobb, mint 180° , a kimaradó nagyobbik körív mértékét úgy kapjuk meg, ha a teljes kör mértékéből kivonjuk a kisebbik szög értékét ($360^\circ - \alpha^\circ$).
- Egy pontos félkörív hossza fokban mérve 180° .
- A teljes, bezáródó körvonal mértéke összesen 360° .
- Két körív (ugyanabban a körben, vagy egybevágó körökben) akkor és csak akkor kongruens egymással, ha a fokban mért nagyságuk teljesen megegyezik.



2. Húrokra és körívekre vonatkozó összefüggések

A kör geometriájában rendkívül szoros és logikus kapcsolat áll fenn a körívek, a húrok és a középponti szögek között. Az alábbiakban a legfontosabb tételeket és azok logikai bizonyításait vesszük sorra.

Ívek és húrok kongruenciája

T_1 Tétel: Kongruens ívek és húrok kapcsolata

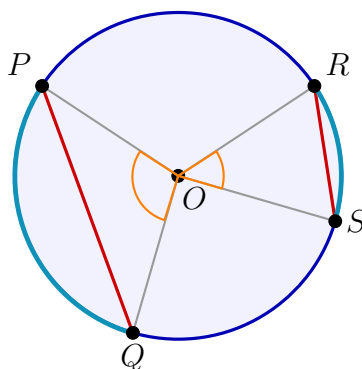
Egyazon körben (vagy teljesen egybevágó körökben) az egyenlő mértékű (kongruens) körívek végpontjait összekötő húrok is egyenlő hosszúságúak.

A tétel igazolása:

Képzeljünk el egy O középpontú kört, amelyen kijelölünk két egyenlő mértékű körívet: a PQ ívet és az RS ívet (PQ ív $\equiv RS$ ív).

- Mivel a két körív egyenlő, a hozzájuk tartozó középponti szögek mértéke is kötelezően megegyezik, azaz $\widehat{POQ} \equiv \widehat{ROS}$.
- Vizsgáljuk meg a létrejött PQO_{Δ} és az ROS_{Δ} háromszögeket! Két-két oldaluk pontosan megegyezik a kör sugarával ($OP = OQ = OR = OS$).
- Az imént beláttuk, hogy a sugarak által közbezárt szögek (a középponti szögek) szintén kongruensek.
- A szög-oldal-szög (sz.o.sz.) egybevágósági alapeset alapján ez a két háromszög teljesen egybevágó ($PQO_{\Delta} \equiv ROS_{\Delta}$). Ebből kifolyólag a harmadik oldaluk hossza is azonos kell, hogy legyen: $PQ \equiv RS$.

Megfordítás: Ez a geometriai tétel fordítva is tökéletesen érvényes: egy körben a kongruens húrok által lemetezett megfelelő körívek is kongruensek egymással.



Az átmérő és a húr kapcsolata

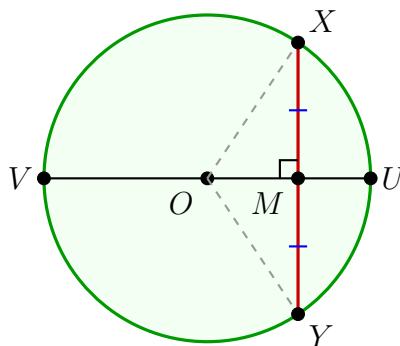
T_2 Tétel: A merőleges átmérő

Bármely körben, ha egy átmérő merőleges egy adott húrra, akkor az az átmérő pontosan felezi magát a húrt, és felezi a húrhoz tartozó köríveket is.

A tétel igazolása:

Legyen adott egy tetszőleges XY húr, és egy rá merőlegesen áthaladó UV átmérő. Ezek a szakaszok metsszék egymást az M pontban ($UV \perp XY$).

- Vizsgáljuk meg a létrejövő OXY_{Δ} -et! Mivel a OX és a OY oldalak a kör sugarai, ez a háromszög egyenlő szárú.
- Ebben az egyenlő szárú háromszögben a OM szakasz egy magasságvonalat képez.
- Az egyenlő szárú háromszögek ismert alaptulajdonsága, hogy az alaphoz tartozó magasságvonal egyben súlyvonal és szögfelező is.
- Mivel súlyvonal, elfelezi a háromszög alapját, vagyis $XM \equiv MY$.
- Mivel szögfelező is, a $\widehat{XOM}$ és a $\widehat{YOM}$ szögek megegyeznek, ami maga után vonja, hogy a hozzájuk tartozó kisebbik körívek is egyenlők (XU ív $\equiv YU$ ív).
- Ha a teljes 180° -os félkörívből kivonjuk ezeket az egyenlő részeket ($180^\circ - XU$ ív $= 180^\circ - YU$ ív), akkor az is egyértelművé válik, hogy a maradék nagyobbik körívek is azonosak (XV ív $\equiv YV$ ív).



A húrok távolsága a középponttól

T_3 Tétel: Középponti távolság

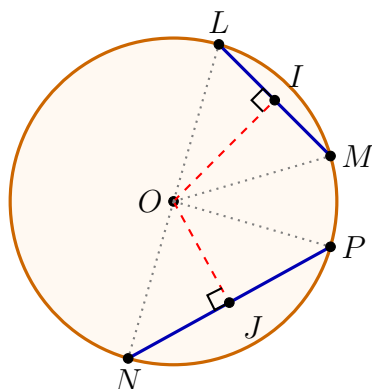
Egy körben a kongruens (egyenlő hosszú) húrok hajszálpontosan ugyanolyan távolságra helyezkednek el a kör középpontjától.

A tétel igazolása:

Vegyünk fel a körben két egyenlő hosszúságú húst ($LM \equiv NP$). Húzzunk ezekre a húrokra merőleges szakaszokat a O középpontból, amelyek az I és a J pontokban metszik a húrokat ($OI \perp LM$ és $OJ \perp NP$).

- Kössük össze a középpontot a húrok végpontjaival, létrehozva így a OLM_{Δ} és a ONP_{Δ} háromszögeket.
- Az oldal-oldal-oldal (o.o.o.) tétel értelmében ez a két háromszög egybevágó ($OLM_{\Delta} \equiv ONP_{\Delta}$). Ennek oka, hogy mindhárom oldaluk megegyezik: két-két oldaluk a kör sugara, a harmadik oldalaik pedig az eleve egyenlő húrok.
- Mivel a két háromszög egybevágó, a bennük lévő megfelelő magasságok hossza is kötelezően egyenlő. Tehát a OI szakasz egyenlő a OJ szakasszal ($OI \equiv OJ$).

Megfordítás: A tétel megfordítása is igaz: azok a húrok, amelyek a kör középpontjától azonos távolságra húzódnak, egyenlő hosszúságúak.



Párhuzamos húrok körívei

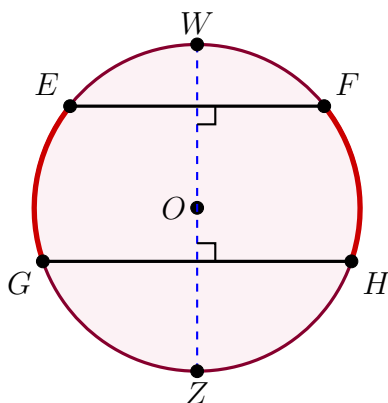
T_4 Tétel: Párhuzamos húrok közti ívek

Egy körön belül, két párhuzamos húr által közbezárt körívek minden esetben egyenlő mértékűek (kongruensek).

A tétel igazolása:

Legyen a körben két párhuzamos húrunk, jelöljük őket EF -fel és GH -val ($EF \parallel GH$).

- Szerkesszük meg az EF húr szakaszfelező merőlegesét! Ez a vonal áthalad a középponton, tehát ez egy WZ átmérő lesz.
- Mivel a két húr párhuzamos ($EF \parallel GH$), ez az átmérő automatikusan a GH húrra is merőleges lesz, és felezni fogja azt.
- A merőleges átmérőről szóló T_2 tételünk értelmében ez a WZ átmérő megfelel a húrokhoz tartozó köríveket is. Ebből adódik, hogy az EW ív egyenlő az FW ívvel, továbbá a GW ív egyenlő a HW ívvel.
- Ha a megfelelő körívek nagyságát kivonjuk egymásból (EW ív $-$ GW ív $=$ FW ív $-$ HW ív), akkor megkapjuk, hogy a két párhuzamos húr közé eső EG ív és az FH ív pontosan megegyezik egymással (EG ív $\equiv$ FH ív).



3. Kerületi szögek

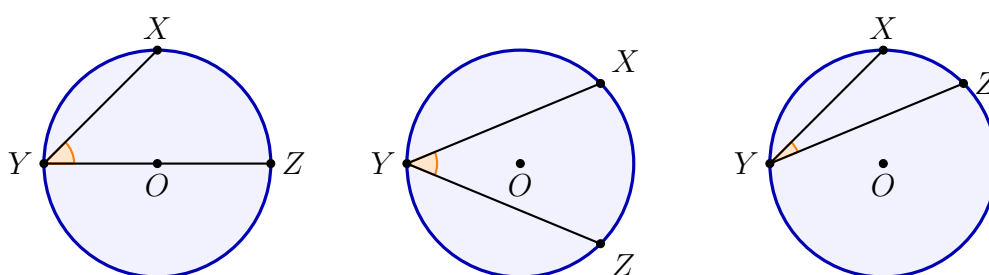
Definíció: A kerületi szög

Azt a szöget, amelynek csúcspontja hajszálpontosan a körvonalon helyezkedik el, a szárait pedig a kör két húrja alkotja, a geometria **kerületi szögnek** nevezi.

Tétel: A kerületi szög mértéke

Bármely kerületi szög fokban mért nagysága pontosan megegyezik a szög szárai által közbezárt (kimetszett) körív szögmértékének a felével. Matematikai felírásban, ha a szög csúcsa Y , a szárai pedig az X és Z pontokban metszik a kört, akkor:

$$\widehat{XYZ} = \frac{XZ}{2}$$



A tétel bizonyítása

A tétel logikai levezetése során három különböző esetet kell megvizsgálnunk aszerint, hogy a kör K középpontja hol helyezkedik el a vizsgált szöghöz képest.

I. eset: A kör középpontja a szög egyik szárára esik

Tekintsük az első ábrát, ahol a YZ szár egyben a kör átmérője is. Kössük össze a K középpontot az X csúccsal! Az így keletkező KXY_Δ egyenlő szárú háromszög lesz, hiszen a KY és a KX oldalak a kör sugarai ($KY = KX = s$). Egy egyenlő szárú háromszögben az alapon fekvő szögek megegyeznek, tehát $\widehat{KYZ} \equiv \widehat{KXY}$. A külsőszög-tétel értelmében a háromszög K csúcsnál lévő külső szöge (azaz az $\widehat{XKZ}$ középponti szög) egyenlő a két nem mellette fekvő belső szög összegével: $\widehat{XKZ} = \widehat{KYZ} + \widehat{KXY} = 2 \cdot \widehat{KYZ}$. Mivel a középponti szög ($\widehat{XKZ}$) mértéke definíció szerint megegyezik a hozzá tartozó XZ ív mértékével, ezt behelyettesítve kapjuk, hogy $XZ = 2 \cdot \widehat{XYZ}$, amiből átrendezéssel adódik a tétel: $\widehat{XYZ} = \frac{XZ}{2}$.

II. eset: A kör középpontja a szög belső tartományába esik

Húzzunk a szög Y csúcsából egy átmérőt, amely az ellenkező oldalon a W pontban metszi a kört! Ez az átmérő az eredeti szöget két olyan részszőgre bontja, amelyekre külön-külön alkalmazható az I. eset. Az I. eset alapján felírható, hogy $\widehat{XYW} = \frac{XW}{2}$ és $\widehat{ZYW} = \frac{ZW}{2}$. Ha ezt a két egyenletet összeadjuk, a két részszőg összege kiadja a teljes eredeti szöget, a két részív összege pedig a teljes ívet:

$$\widehat{XYZ} = \widehat{XYW} + \widehat{ZYW} = \frac{XW}{2} + \frac{ZW}{2} = \frac{XZ}{2}$$

III. eset: A kör középpontja a szög külső tartományában van

Hasonlóan az előzőhöz, húzzunk az Y csúcsból egy átmérőt a W pontig! Ebben a felállásban a

keresett szöget két szög különbségeként tudjuk felírni. Az I. eset értelmében $\widehat{XYW} = \frac{XW}{2}$ és a kisebbik szögre $\widehat{ZYW} = \frac{ZW}{2}$. A kettő különbségét véve megkapjuk a keresett kerületi szöget:

$$\widehat{XYZ} = \widehat{XYW} - \widehat{ZYW} = \frac{XW}{2} - \frac{ZW}{2} = \frac{XZ}{2}$$

Gyakorlati alkalmazások

1. Alkalmazás: Körbe írt háromszög

Egy háromszöget akkor nevezünk körbe írtnak, ha annak mindhárom csúcsa pontosan illeszkedik a körvonalra. Tegyük fel, hogy egy PQr háromszög körbe van írva. Ismerjük két körívének a mértékét: $PQ = 102^\circ$ és $Pr = 146^\circ$. Számítsuk ki a háromszög belső szögeit!

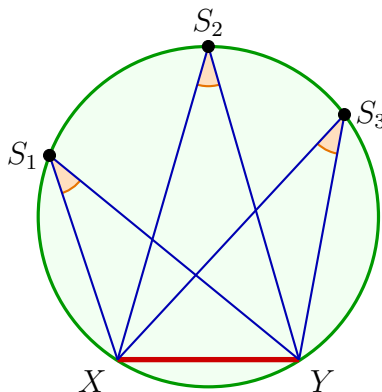
- A Q csúcsnál lévő $\widehat{PQr}$ kerületi szög a vele szemben lévő Pr ívre támaszkodik, így $\widehat{PQr} = \frac{146^\circ}{2} = 73^\circ$.
- Az r csúcsnál lévő $\widehat{PrQ}$ kerületi szög a PQ ívre támaszkodik, így $\widehat{PrQ} = \frac{102^\circ}{2} = 51^\circ$.
- A hiányzó Qr ívet úgy kapjuk meg, hogy a 360° -os teljesszögből kivonjuk az ismert íveket:
 $Qr = 360^\circ - (102^\circ + 146^\circ) = 112^\circ$.
- Ebből adódóan a P csúcsnál lévő szög: $\widehat{QPr} = \frac{112^\circ}{2} = 56^\circ$.

2. Alkalmazás: Félkörbe írt szög (Thalész-tétel)

Vizsgáljuk meg, mekkora az a kerületi szög, amelynek szárai a kör átmérőjének végpontjaira támaszkodnak! Ha a körbe írt háromszög egyik oldala egybeesik az átmérővel, akkor az átmérő által meghatározott körív pontosan 180° -os (félkör). A kerületi szögek tételét alkalmazva az átmérővel szemközti szög: $\frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$. Ez azt jelenti, hogy a félkörbe írt háromszög mindig derékszögű.

3. Alkalmazás: Látószögek a sportpályán

Képzeljünk el egy kézilabdapályát, ahol a kapu vonalát egy XY húr modellezi a körvonalon belül. Három játékos (S_1, S_2 és S_3) áll a köríven, és mindhárman a kapura lőnek. Melyik játékosnak van a legnagyobb esélye a gólszerzésre a szög nagysága alapján? *Megoldás:* Mivel mindhárom játékos pozíciója egy-egy kerületi szöget alkot, és a lövéseik szárai mind ugyanazt az XY ívet (a kaput) fogják közre, a szögük mértéke matematikailag megegyezik: $\widehat{S_1} = \widehat{S_2} = \widehat{S_3}$. Tehát mindhárom játékos pontosan ugyanakkora szög alatt látja a kaput, így ebből a szempontból az esélyeik teljesen egyenlők.



4. Egy kör érintője, egy külső pontból egy körhöz húzott érintők

A síkban egy tetszőleges a egyenes és egy $C(O, r)$ körvonal egymáshoz viszonyított helyzetét alapvetően az határozza meg, hogy a kör O középpontja milyen d távolságra fekszik a vizsgált egyenestől. Ezen geometriai távolság és a kör r sugarának összehasonlítása alapján három alapvető esetet különböztetünk meg.

Az egyenes és a kör három kölcsönös helyzete

I. Eset: Az egyenes a körön kívül halad el ($d > r$)

Abban az esetben, ha a középpontból az egyenesre bocsátott merőleges távolság nagyobb, mint a sugár ($d > r$), az egyenes teljesen a kör külső tartományában fekszik. A két geometriai alakzatnak nincs közös pontja, azaz metszetük üreshalmaz:

$$C(O, r) \cap a = \emptyset$$

II. Eset: Az egyenes érinti a kört ($d = r$)

Ha az O pont egyenestől mért távolsága hajszálpontosan megegyezik a kör sugarával ($d = r$), akkor az egyenes éppen csak „hozzáér” a körvonalhoz. Ekkor a körnek és az egyenesnek pontosan egyetlen közös pontja van: az A érintési pont.

$$C(O, r) \cap a = \{A\}$$

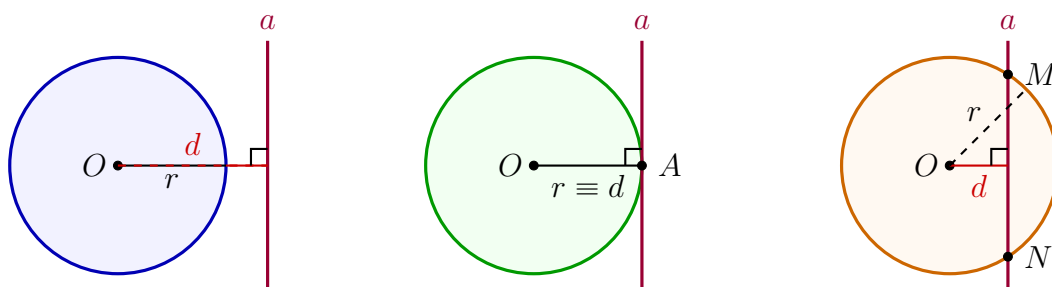
Ezt az a egyenest a kör **érintőjének** nevezzük. Nagyon fontos geometriai tulajdonság, hogy az érintési pontba húzott OA sugár mindig **merőleges** az érintőegyenesre ($OA \perp a$).

III. Eset: Az egyenes metszi a kört ($d < r$)

Amikor a kör középpontjának távolsága az egyenestől kisebb, mint a kör sugára ($d < r$), az egyenes belép a kör belső tartományába, és átvágja azt. Ekkor az egyenes pontosan két különböző pontban (M és N) metszi a körvonalat:

$$C(O, r) \cap a = \{M, N\}$$

Az ilyen egyenest a kör **szelőjének** nevezzük. A szelőnek a körön belülré eső része képezi az MN húrt.



I. $d > r$ (Nincs közös pont) II. $d = r$ (Érintő, 1 pont) III. $d < r$ (Szelő, 2 pont)

Külső pontból húzott érintők tulajdonságai

Ha felvesszünk a kör külső tartományában egy tetszőleges M pontot, akkor ebből a pontból pontosan **két különböző érintőegyenes** szerkeszthető a körhöz. Ezzel kapcsolatban fogalmazzuk meg a következő alapvető tételt.

Tétel: A külső pontból húzott érintőszakaszok kongruenciája

Egy külső pontból egy adott körhöz húzott két érintőszakasz hossza hajszálpontosan megegyezik (kongruensek egymással).

Bizonyítandó állítás: Ha az M pontból húzott érintők az A és B pontokban érintik a kört, akkor $MA \equiv MB$.

A tétel logikai bizonyítása:

Kössük össze a külső M pontot a kör O középpontjával, valamint húzzuk be az OA és OB érintési pontokba mutató sugarakat! Így két háromszöget kapunk: az MOA_{Δ} és az MOB_{Δ} háromszögeket.

- Tudjuk, hogy az érintési pontba húzott sugár mindig merőleges magára az érintőre. Emiatt az $OA \perp MA$ és az $OB \perp MB$, vagyis mindkét létrejött háromszög **derékszögű** ($\angle OAM = \angle OBM = 90^\circ$).
- A két derékszögű háromszög átfogója közös, hiszen az OM szakasz mindkettőnek alkotó-eleme ($OM \equiv OM$).
- A háromszögek egyik befogója a kör sugara, amik természetesen megegyeznek ($OA \equiv OB = r$).

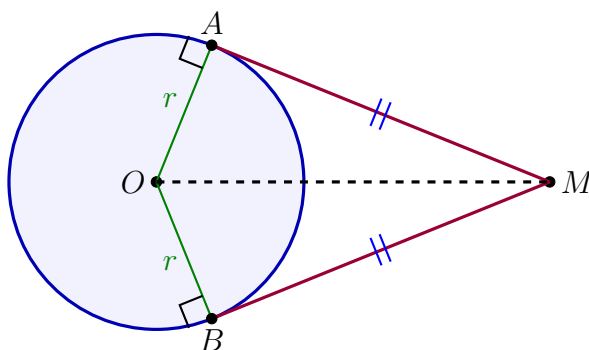
A derékszögű háromszögekre vonatkozó speciális egybevágósági eset (átfogó-befogó eset) értelmében a két háromszög teljesen egybevágó:

$$MOA_{\Delta} \equiv MOB_{\Delta}$$

Mivel a két háromszög kongruens, ebből egyenesen következik, hogy az átfogón és a sugáron kívüli harmadik oldalaik is kötelezően egybevágóak, azaz:

$$MA \equiv MB$$

Ezzel a tételt sikeresen igazoltuk.



Fontos geometriai következmények és észrevételek

A fenti tételt bizonyító $MOA_{\Delta} \equiv MOB_{\Delta}$ egybevágóságból számos további nagyon hasznos geometriai tulajdonság is levezethető:

1. **Szögfelező tulajdonság:** Mivel a két derékszögű háromszög kongruens, a megfelelő szögek is megegyeznek ($\angle A\hat{M}O \equiv \angle B\hat{M}O$ és $\angle A\hat{O}M \equiv \angle B\hat{O}M$). Ez azt jelenti, hogy a középpontot a külső ponttal összekötő OM szakasz nem más, mint az érintők által bezárt $\widehat{AMB}$ szögnek, valamint az érintési sugarak által bezárt $\widehat{AOB}$ középponti szögnek a **szögfelezője**.

2. **Felezőmerőleges:** Az $MA \equiv MB$ és $OA \equiv OB$ kongruenciák miatt mind az M , mind az O pont egyenlő távolságra fekszik az A és B pontoktól. A síkgeometria alaptörvényei szerint az az egyenes, melynek pontjai egyenlő távol vannak egy szakasz végpontjaitól, maga a szakaszfelező merőleges. Tehát az MO egyenes az AB húr **felezőmerőlegese** ($MO \perp AB$ és felezi azt).
3. **Thalész-kör (Félkörbe írt derékszögek):** Vegyük észre, hogy az OAM_{Δ} és OBM_{Δ} háromszögekben az A és a B csúcsoknál derékszög található ($\hat{O}AM = \hat{O}BM = 90^\circ$), és mindkét derékszög az OM átfogóra támaszkodik. A Thalész-tétel megfordítása értelmében ez azt jelenti, hogy az A és B érintési pontok rajta fekszenek azon a segédkörön, amelynek az **átmérője pontosan az OM szakasz**. Ezen tulajdonság segítségével lehet körzővel és vonalzóval pontosan megszerkeszteni egy külső pontból a körhöz húzható érintőket!

5. Szabályos sokszögek

Definíció: A szabályos sokszög

Egy konvex sokszöget akkor nevezünk **szabályos sokszögnek**, ha annak valamennyi oldala páronként egyenlő hosszú (kongruens), és valamennyi belső szöge is megegyezik (kongruens egymással).

Szerkesztés kör segítségével és belső szögek mértéke:

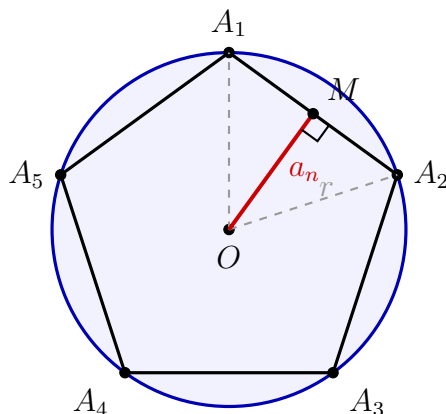
Bármely szabályos n oldalú sokszög szorosan kapcsolódik a kör geometriájához: a csúcsai egyetlen közös körvonalra (a köré írt körre) illeszkednek. Ha egy körvonalat n darab egyenlő mértékű körívre osztunk fel ($A_1A_2 \equiv A_2A_3 \equiv \dots \equiv A_nA_1$), és az osztópontokat egyenes szakaszokkal sorban összekötjük, egy szabályos sokszöget kapunk.

- Mivel kongruens körívekhez a körben kongruens húrok tartoznak, a keletkező alakzat oldalai egyenlők: $A_1A_2 \equiv A_2A_3 \equiv \dots \equiv A_nA_1$.
- Ha a kör O középpontját összekötjük a sokszög csúcsaival, pontosan n darab egybevágó egyenlő szárú háromszöget kapunk. Ebből következik, hogy a sokszög szögei is kongruensek egymással.
- **A belső szögek nagysága:** A keletkezett n darab háromszög belső szögeinek összege $n \cdot 180^\circ$. Mivel a középpont körül lévő szögek egy teljes 360° -os szöget alkotnak, ezt ki kell vonnunk a háromszögek szögösszegéből. Így a sokszög belső szögeinek összege: $(n - 2) \cdot 180^\circ$. Mivel mind az n darab szög egyenlő, egyetlen belső szög (α_n) nagysága:

$$\alpha_n = \frac{(n - 2) \cdot 180^\circ}{n}$$

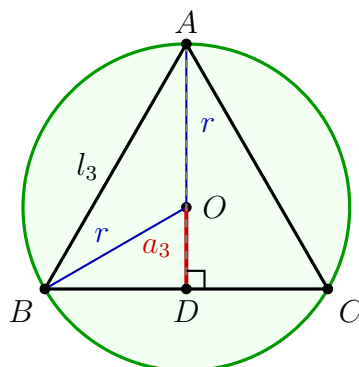
Definíció: A sokszög apotémája

A szabályos sokszög O középpontjából bármelyik oldalra bocsátott merőleges szakasz hosszát a sokszög **apotémájának** (vagy a beírt kör sugarának) nevezzük. Jelölése általában a vagy a_n .



1. A szabályos háromszög (Egyenlő oldalú háromszög)

Ha a körvonalat három egyenlő ívre osztjuk ($AB \equiv BC \equiv CA$), akkor az összekötő húrok egy szabályos háromszöget alkotnak ($AB \equiv BC \equiv CA$). Ekkor a háromszög O magasságpontja, súlypontja, köré írt és beírt körének középpontja egybeesik. A köré írt kör sugara $AO = r$, a háromszög oldalhossza l_3 , apotémája pedig a_3 .



Metrikus összefüggések levezetése az r sugár függvényében:

- **Az apotéma (a_3):** Mivel a súlypont a súlyvonalat (amely egyben az AD magasság) $2 : 1$ arányban osztja a csúcs javára, az OD szakasz fele az AO sugárnak:

$$a_3 = OD = \frac{AO}{2} = \frac{r}{2}$$

Ebből adódóan a teljes magasság: $AD = r + \frac{r}{2} = \frac{3r}{2}$.

- **Az oldalhossz (l_3):** Az ODB_Δ derékszögű háromszögben alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt:

$$BD^2 = BO^2 - OD^2 = r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2 = r^2 - \frac{r^2}{4} = \frac{3r^2}{4} \implies BD = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$

Mivel a D pont felezi a BC oldalt, az oldal hossza a BD szakasz kétszerese:

$$l_3 = BC = 2 \cdot BD = r\sqrt{3}$$

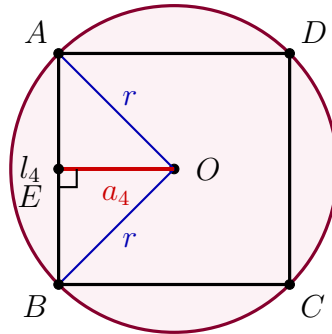
- **A kerület (K_3) és terület (T_3):**

$$K_3 = 3 \cdot l_3 = 3r\sqrt{3}$$

$$T_3 = \frac{BC \cdot AD}{2} = \frac{r\sqrt{3} \cdot \frac{3r}{2}}{2} = \frac{3r^2\sqrt{3}}{4}$$

2. A szabályos négyszög (Négyzet)

Ha a kört két egymásra merőleges átmérővel negyedeljük, a keletkező négy osztópont összekötésével négyzetet kapunk ($AB \equiv BC \equiv CD \equiv DA$). Az AOB_Δ egy olyan egyenlő szárú derékszögű háromszög, amelynek befogói a kör r sugarai.



Metrikus összefüggések levezetése:

- **Az oldalhossz (l_4):** Az AOB_Δ derékszögű háromszögre felírva a Pitagorasz-tételt (vagy a négyzet átlójának tulajdonságát alkalmazva):

$$l_4 = AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{r^2 + r^2} = \sqrt{2r^2} = r\sqrt{2}$$

- **Az apotéma (a_4):** Mivel a négyzet középpontja az oldaltól pontosan az oldalhossz felére fekszik:

$$a_4 = OE = \frac{AB}{2} = \frac{l_4}{2} = \frac{r\sqrt{2}}{2}$$

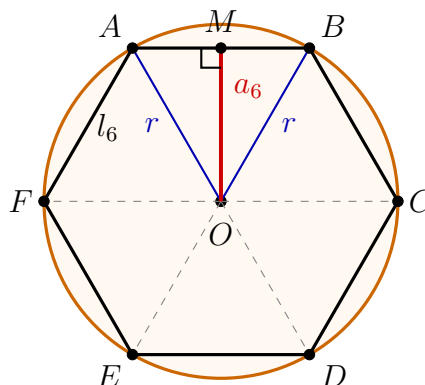
- **A kerület (K_4) és terület (T_4):**

$$K_4 = 4 \cdot l_4 = 4r\sqrt{2}$$

$$T_4 = (l_4)^2 = (r\sqrt{2})^2 = 2r^2$$

3. A szabályos hatszög

Ha a körvonalat hat egyenlő ívre osztjuk, szabályos hatszöget kapunk. Ekkor a kör középpontja a csúcsokkal felkötve pontosan **hat darab kongruens, egyenlő oldalú (szabályos) háromszöget** alkot ($AOB_\Delta \equiv BOC_\Delta \equiv \dots$). Emiatt a hatszög belső szögei 120° -osak.



Metrikus összefüggések levezetése:

- **Az oldalhossz (l_6):** Mivel az AOB_Δ egyenlő oldalú háromszög, az oldalhossza megegyezik a kör sugarával:

$$l_6 = AB = r$$

- **Az apotéma (a_6):** Az apotéma az r oldalú szabályos háromszög magassága. A Pitagorasz-tételt az OAM_Δ derékszögű háromszögre felírva:

$$a_6^2 = OM^2 = OA^2 - AM^2 = r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{3r^2}{4} \implies a_6 = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$

- **A kerület (K_6) és terület (T_6):**

$$K_6 = 6 \cdot l_6 = 6r$$

Mivel a hatszög területe 6 darab AOB háromszög területéből áll:

$$T_6 = 6 \cdot T_{AOB} = 6 \cdot \frac{AB \cdot OM}{2} = 6 \cdot \frac{r \cdot \frac{r\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{3r^2\sqrt{3}}{2}$$

Összefoglaló táblázat

A könnyebb áttekinthetőség érdekében az alábbi táblázatban foglaljuk össze a szabályos háromszög, a négyzet és a szabályos hatszög legfontosabb képleteit a köré írt kör r sugarának függvényében:

	Szabályos háromszög ($n = 3$)	Négyzet ($n = 4$)	Szabályos hatszög ($n = 6$)
Oldalhossz (l_n)	$l_3 = r\sqrt{3}$	$l_4 = r\sqrt{2}$	$l_6 = r$
Apotéma (a_n)	$a_3 = \frac{r}{2}$	$a_4 = \frac{r\sqrt{2}}{2}$	$a_6 = \frac{r\sqrt{3}}{2}$
Terület (T_n)	$T_3 = \frac{3r^2\sqrt{3}}{4}$	$T_4 = 2r^2$	$T_6 = \frac{3r^2\sqrt{3}}{2}$
Kerület (K_n)	$K_3 = 3r\sqrt{3}$	$K_4 = 4r\sqrt{2}$	$K_6 = 6r$

6. A kör kerülete és területe

A geometria nyelvén a *kör* kifejezést kettős értelemben használjuk: jelenti magát a határoló görbét (a körvonalat), és jelenti a görbe által bezárt síkidomot (a körlapot) is. Amikor a kör **kerületéről** (K) beszélünk, akkor a körvonal pontos hosszára gondolunk, míg a kör **területe** (T) a körlap által lefedett síkrész nagyságát fejezi ki.

A π (pi) szám és a kör kerülete

Már az ókori matematikusok felfedezték azt az alapvető természeti törvényszerűséget, hogy bármely kör kerületének és átmérőjének ($2r$) az aránya egy állandó, invariáns szám. Bármekkora kört is vizsgálunk, ez a hányados mindig pontosan ugyanannyi:

$$\frac{K}{2r} = \text{állandó}$$

Ezt a nevezetes matematikai konstansot Leonhard Euler 1739-ben tett javaslatára a görög ábécé π (pi) betűjével jelöljük. A π egy irracionális szám (vagyis nem írható fel két egész szám hányadosaként), tizedestört alakja végtelen és nem szakaszos:

$$\pi \approx 3,14159265 \dots \approx 3,14$$

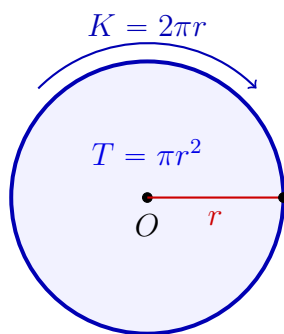
Megjegyzés: A geometriai számítások és feladatmegoldások során általában nem számolunk a π közelítő tizedes értékével, hanem pontos magában hagyjuk a képletben. Például egy $r = 5$ cm sugarú kör kerülete pontosan $K = 2\pi \cdot 5 = 10\pi$ cm.

Tétel: A kör kerülete és területe

Egy r sugarú kör kerületét (K) és területét (T) az alábbi alapképletekkel számítjuk ki:

$$K = 2\pi r \quad \text{vagy átmérővel:} \quad K = d \cdot \pi$$

$$T = \pi r^2$$

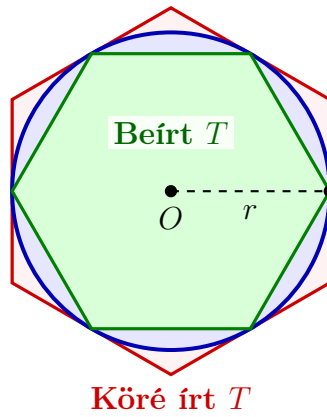


A kör területének közelítése szabályos sokszögekkel

Míg a kerület képlete a π definíciójából közvetlenül adódik, a terület $T = \pi r^2$ képletét a jelenlegi általános iskolai matematikai eszköztárunkkal (határtekintés és integrálszámítás nélkül) nem tudjuk szigorúan bizonyítani. Azonban egy rendkívül szemléletes geometriai eljárással *megközelíthetjük* az igazi értéket.

Képzeld el, hogy a vizsgált körbe beírunk egy szabályos sokszöget, és egyúttal rajzolunk köré is egy másik szabályos sokszöget (például szabályos hatszögeket, $n = 6$).

- A körbe írt sokszög területe ($T_{\text{beírt}}$) mindig kisebb, mint a kör területe, hiszen a sokszög teljesen a körön belül fekszik: $T_{\text{beírt}} < T_{\text{kör}}$.
- A köré írt sokszög területe ($T_{\text{köré írt}}$) mindig nagyobb, mint a kör területe, hiszen a kör teljesen magában foglalja: $T_{\text{kör}} < T_{\text{köré írt}}$.
- Ha a sokszögek oldalszámát (n) folyamatosan növeljük (pl. 6, 12, 24, 48... oldalú sokszögekre), a két sokszög területe egyre jobban rásimul a körre, vagyis a területük kongruenciához közelít ($T_{\text{beírt}} \approx T_{\text{kör}} \approx T_{\text{köré írt}}$). Minél nagyobb az oldalszám, annál pontosabban közelítjük meg a πr^2 értéket.



A körív hossza és a körcikk területe

A gyakorlati feladatok során gyakran nem a teljes körrel, hanem csak annak egy meghatározott n° -os középponti szöghöz tartozó részével kell dolgoznunk.

Definíció: A körcikk

A körlap belső tartományának azt a részét, amelyet a kör két sugára (OA és OB) és az általuk közbezárt körív határol, **körcikknek** nevezzük.

A körív hosszának (L) levezetése egyenes arányossággal:

Tudjuk, hogy a teljes, 360° -os teljesszöghöz tartozó körív hossza maga a teljes kerület, azaz $2\pi r$. Mivel a körív hossza egyenesen arányos a középponti szög mértékével, felírhatjuk az 1 fokra eső ívhosszat:

- A 360° -os középponti szöghöz tartozó ívhossz: $2\pi r$
- Az 1° -os középponti szöghöz tartozó ívhossz: $\frac{2\pi r}{360} = \frac{\pi r}{180}$
- Ebből következik, hogy egy tetszőleges n° -os középponti szöghöz tartozó körív hossza (L) ennek az n -szerese:

$$L = \frac{\pi r n^\circ}{180^\circ}$$

A körcikk területének ($T_{\text{körcikk}}$) levezetése:

A körív hosszához teljesen hasonló logikával a körcikk területe is egyenesen arányos a nyitószög mértékével. Induljunk ki a teljes körlap területéből (πr^2):

- A 360° -os szögbe eső teljes körlap területe: πr^2
- Az 1° -os szögbe eső kis körcikk területe: $\frac{\pi r^2}{360}$
- Így egy tetszőleges n° -os középponti szöghöz tartozó körcikk területe:

$$T_{\text{körcikk}} = \frac{\pi r^2 n^\circ}{360^\circ}$$

