

A háromszögek hasonlósága

7. osztály

1. Arányos szakaszok

Két geometriai szakasz arányát megkapjuk, ha a hosszait (azonos mértékegységben mérve) elosztjuk egymással. Az arány egy viszonyszám, amely megmutatja, hogy az egyik szakasz hányszorosa a másiknak.

Példa: Legyen adott két szakasz: $EF = 8$ cm és $GH = 12$ cm. A két szakasz hosszának aránya:

$$\frac{EF}{GH} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

Gyakorló feladat

Egy téglalap hosszabbik oldala $x = 15$ cm, rövidebbik oldala $y = 10$ cm. Határozzuk meg a következő arányokat:

- a) a hosszabbik és a rövidebbik oldal arányát;
- b) a rövidebbik és a hosszabbik oldal arányát;
- c) a hosszabbik oldal és a téglalap területének arányát!

Megoldás:

a) $\frac{x}{y} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$

b) $\frac{y}{x} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$

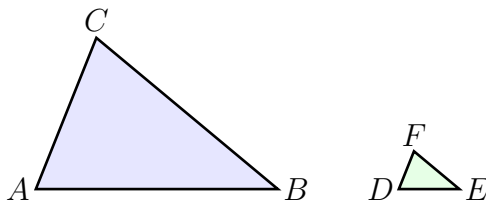
c) A terület kiszámítása: $K = 2 \cdot (15 + 10) = 50$ cm. Az arány:

$$\frac{x}{K} = \frac{15}{50} = \frac{3}{10}$$

Arányos szakaszok

Két háromszög oldalait arányosnak nevezzük, ha a megfelelő oldalhosszaik hányadosa állandó értéket ad. Ezt az állandót arányossági tényezőnek nevezzük és k -val jelöljük.

Példa: Vizsgáljuk meg az ábrán látható $ABC_{\triangle}$ és $DEF_{\triangle}$ oldalainak arányát! Adatok: $AB = 8$ cm, $BC = 16$ cm, $AC = 12$ cm, illetve $DE = 2$ cm, $EF = 4$ cm, $DF = 3$ cm.



Írjuk fel a megfelelő oldalak hányadosát:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{8}{2} = 4, \quad \frac{BC}{EF} = \frac{16}{4} = 4, \quad \frac{AC}{DF} = \frac{12}{3} = 4 \implies \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} = 4$$

Mivel az arány minden oldalcsár esetén megegyezik, a $ABC_{\triangle}$ és $DEF_{\triangle}$ oldalai arányosak egymással. Az arányossági tényező: $k = 4$. Jelölés: $([AB], [BC], [AC]) \sim ([DE], [EF], [DF])$.

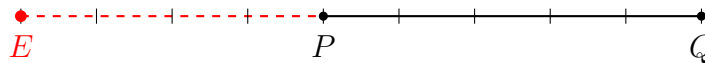
Szakasz felosztása adott arányban

Egy adott szakaszt a tartóegyenesén két pont is feloszthat ugyanabban a megadott arányban: egy pont a szakaszon belül, egy pedig a szakaszon kívül helyezkedik el. Vizsgáljuk meg egy PQ szakasz $2 : 3$ arányú felosztását!

I. eset: Belső osztópont ($I \in [PQ]$)



II. eset: Külső osztópont ($E \notin [PQ]$)



- **Belső osztópont** ($I \in [PQ]$): Az I pont a P és Q pontok között fekszik. Ekkor felírható: $\frac{IP}{IQ} = \frac{2}{3}$. A két részek összege adja a teljes szakaszt ($IP + IQ = PQ$).
- **Külső osztópont** ($E \notin [PQ]$): Az E pont a szakaszon kívül fekszik, az egyenesen. Ekkor: $\frac{EP}{EQ} = \frac{2}{3}$. Itt a két távolság különbsége adja a teljes szakaszt ($EQ - EP = PQ$).

Gyakorló feladat

Adott egy $PQ = 50$ cm hosszúságú szakasz. Határozzuk meg azokat a pontokat a szakasz egyenesén, amelyek $2 : 3$ arányban osztják fel a szakaszt! Számítsuk ki a keletkező távolságokat mindkét esetben!

I. eset: Belső pont ($I \in [PQ]$) Mivel az arány $2 : 3$, vezessük be az egységnyi x arányrészt! Ekkor $IP = 2x$ és $IQ = 3x$.

$$\frac{IP}{IQ} = \frac{2}{3} \implies IP + IQ = PQ \implies 2x + 3x = 50$$

$$5x = 50 \implies x = 10 \text{ cm}$$

A keresett szakaszok hossza tehát:

$$IP = 2 \cdot 10 = \mathbf{20 \text{ cm}}, \quad IQ = 3 \cdot 10 = \mathbf{30 \text{ cm}}.$$

Ellenőrzés: $20 + 30 = 50$ cm, és $\frac{20}{30} = \frac{2}{3}$.

II. eset: Külső pont ($E \notin [PQ]$) A pont a szakaszon kívül, a közelebbi végpont (P) irányában helyezkedik el. A távolságok most is $EP = 2x$ és $EQ = 3x$, de a teljes szakaszt a különbségük adja:

$$\frac{EP}{EQ} = \frac{2}{3} \implies EQ - EP = PQ \implies 3x - 2x = 50$$

$$x = 50 \text{ cm}$$

A külső pont távolságai a végpontoktól:

$$EP = 2 \cdot 50 = \mathbf{100 \text{ cm}}, \quad EQ = 3 \cdot 50 = \mathbf{150 \text{ cm}}.$$

Ellenőrzés: $150 - 100 = 50$ cm, és $\frac{100}{150} = \frac{2}{3}$.

2. Az egyenlő közű párhuzamosok tétele

Az egyenlő közű párhuzamosok tétele

Ha a $p_1, p_2, \dots, p_n$ ($n \in \mathbb{N}, n \geq 3$) párhuzamos egyenesek rendszere egy adott s_1 szelőn egymással egyenlő (kongruens) szakaszokat metsz ki, akkor ez a párhuzamos egyenesnyaláb bármely más s_2 szelőn is egymással egyenlő szakaszokat fog létrehozni.

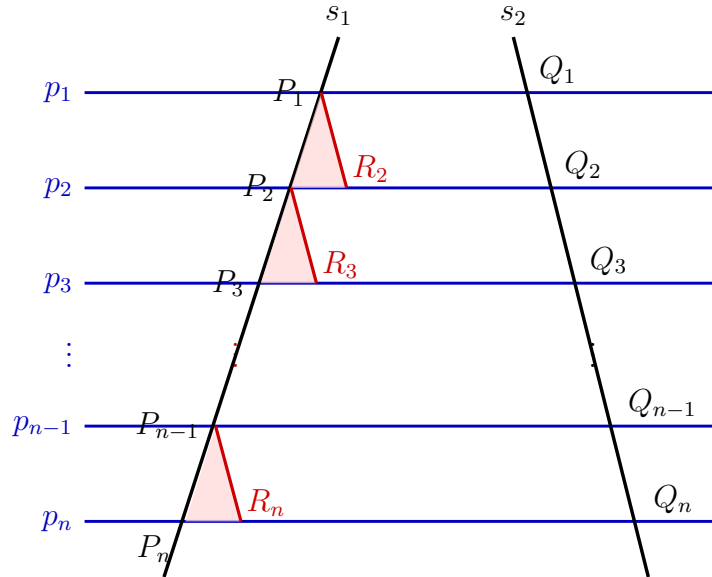
A tétel bizonyítása

Tegyük fel, hogy az s_1 szelőn keletkezett szakaszok egyenlők, azaz:

$$P_1P_2 \equiv P_2P_3 \equiv \dots \equiv P_{n-1}P_n$$

Célunk igazolni, hogy az s_2 szelőn keletkező szakaszok is egyenlő hosszak:

$$Q_1Q_2 \equiv Q_2Q_3 \equiv \dots \equiv Q_{n-1}Q_n$$



Húzzunk a $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$ pontokon keresztül segédegyeneseket, amelyek párhuzamosak az s_2 szelővel! Ezek a segédvonalak a következő párhuzamos egyenesekből az $R_2, R_3, \dots, R_n$ pontokat metszik ki.

1. Vizsgáljuk meg a keletkező háromszögeket: a $P_1P_2R_2\triangle$ és $P_2P_3R_3\triangle$ egybevágók (Sz-O-Sz alapeset), mivel:

- az átfogó oldalak egyenlők a feltétel szerint: $P_1P_2 \equiv P_2P_3$,
- a megfelelő szögek egyenlők (egyállású szögek a párhuzamosok miatt): $\widehat{P_1P_2R_2} \equiv \widehat{P_2P_3R_3}$ és $\widehat{P_2P_1R_2} \equiv \widehat{P_3P_2R_3}$.

Az egybevágóságból következik, hogy a megfelelő oldalak is egyenlők: $P_1R_2 \equiv P_2R_3$. (1)

2. A $P_1R_2Q_2Q_1$ és $P_2R_3Q_3Q_2$ négyszögek paralellogrammák, mivel szemközti oldalaiik szerkesztésükből adódóan párhuzamosak. A paralellogramma szemközti oldalai egyenlők, így:

$$P_1R_2 \equiv Q_1Q_2 \quad \text{és} \quad P_2R_3 \equiv Q_2Q_3. \quad (2)$$

3. Az (1) és (2) megállapításokat összevetve megkapjuk a kívánt egyenlőséget:

$$Q_1Q_2 \equiv Q_2Q_3 \equiv \dots \equiv Q_{n-1}Q_n.$$

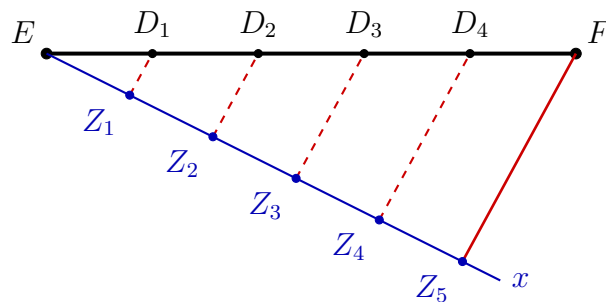
Megjegyzés: Amennyiben az s_2 szelő merőleges a p_n párhuzamosokra, akkor az egyenesek közötti legrövidebb távolságok egyenlők, tehát valóban *egyenlő közű* párhuzamosokról beszélünk.

Gyakorló feladat (Szakasz egyenlő részekre osztása)

Feladat: Osszunk fel egy adott $EF = 7$ cm hosszúságú szakaszt 5 egyenlő részre kizárólag körző és vonalzó segítségével!

A szerkesztés menete (Tétel alkalmazása):

1. Vegyünk fel az E végpontból kiindulva egy tetszőleges szögben hajló Ex félegyenest!
2. A körzőt egy tetszőleges, kényelmes egységre nyitjuk, és az E ponttól indulva 5 alkalommal egymás után felmérjük ezt a távolságot az Ex félegyenestre. Így megkapjuk a Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 és Z_5 osztópontokat.
3. Az utolsó, Z_5 pontot kötössük össze a szakasz másik végpontjával, a F ponttal!
4. Tolóvonalzó segítségével húzzunk a Z_5F egyenessel párhuzamosokat a többi Z_i osztópontból! Az egyenlő közű párhuzamosok tétele alapján ezek a párhuzamosok az eredeti EF szakaszt halálpontosan 5 egyenlő részre fogják osztani (D_1, D_2, D_3, D_4 pontok).



3. Thalész tétele

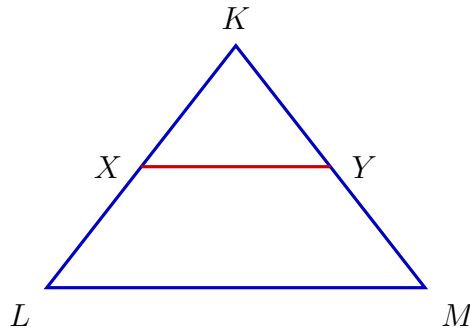
Thalész tétele

Ha egy háromszög egyik oldalával párhuzamos egyenest húzunk, akkor az a másik két oldalt (vagy azok meghosszabbításait) arányos szakaszokra osztja.

A tétel bizonyítása és aránypárai

Vizsgáljuk meg a KLM_{Δ} -et, amelyben az XY szakasz párhuzamos az alapoldallal ($XY \parallel LM$). Igazolnunk kell, hogy:

$$\frac{KX}{XL} = \frac{KY}{YM}$$



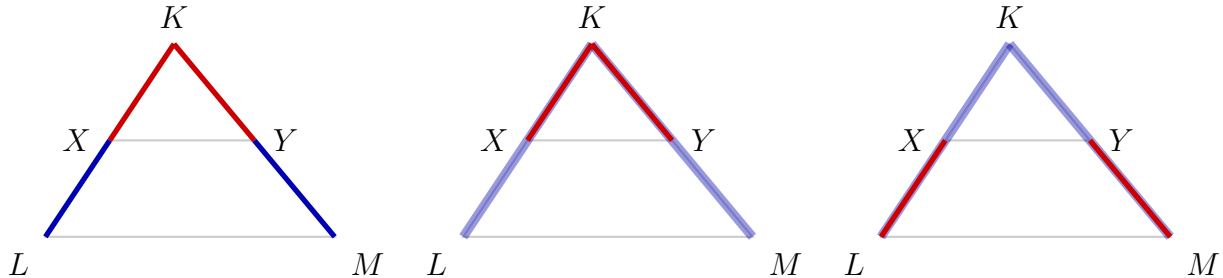
Bizonyítás menete (racionális arány esetében): Tegyük fel, hogy az arány $\frac{KX}{XL} = \frac{3}{2}$. Osszuk fel a KL oldalt $3 + 2 = 5$ egyenlő részegységre! Ekkor az X pont pont a harmadik osztópont lesz felülről számítva. Ha mind az 5 osztópontból párhuzamosokat húzunk az LM alappal, akkor az *egyenlő között párhuzamosok tétele* alapján ezek a lineáris szelők a túloldali KM oldalt is pontosan 5 egyenlő egységre fogják felosztani. Ebből közvetlenül adódik, hogy ott is 3 egység esik a felső részre és 2 az alsóra, vagyis:

$$\frac{KY}{YM} = \frac{3}{2} \implies \frac{KX}{XL} = \frac{KY}{YM}.$$

Származtatott aránypárok: A belső arányok tulajdonságait felhasználva a tételt többféle ekvivalens formában is felírhatjuk (ahol $KL \parallel XY$):

$$1) \frac{KX}{XL} = \frac{KY}{YM} \quad 2) \frac{KX}{KL} = \frac{KY}{KM} \quad 3) \frac{XL}{KL} = \frac{YM}{KM}$$

Az alábbi három vizuális emlékeztető ábra segít a különböző felírások logikájának megjegyzésében:

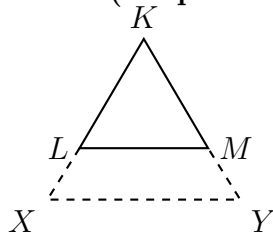


Általánosítások

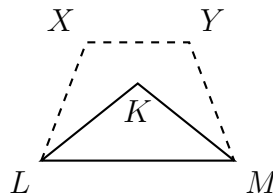
Thalész tétele abban az esetben is változatlanul igaz, ha a szelőpontok nem magukra a háromszög oldalaira, hanem azok egyenesek menti meghosszabbításaira esnek.

- **I. eset:** A szelő az alap alatt halad ($L \in (KX)$). Ekkor: $\frac{KX}{KL} = \frac{KY}{KM}$.
- **II. eset (Csúcsszögek esete):** A szelő a felső csúcs felé fekszik ($K \in (LX)$). Ekkor is: $\frac{KX}{KL} = \frac{KY}{KM}$.

I. ábra (Alap alatt)



II. ábra (Csúcs mögött)



Thalész tételének fordított tétele

Fordított tétel

Ha egy egyenes a háromszög két oldalát (vagy azok félegyenes menti meghosszabbítását) arányos szakaszokra osztja fel, akkor ez az egyenes feltétlenül párhuzamos a háromszög harmadik oldalával.

Feltétel (F): $\frac{KX}{KL} = \frac{KY}{KM}$

Következmény (K): $XY \parallel LM$

Bizonyítás (*reductio ad absurdum* - indirekt módon):

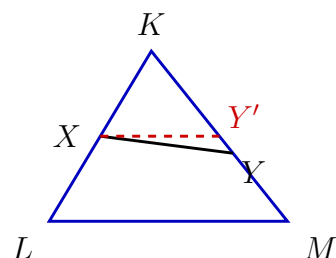
Tegyük fel indirekt módon, hogy XY **nem** párhuzamos LM -mel ($XY \nparallel LM$). Ekkor a K csúsból indulva biztosan létezik egy olyan Y' pont a KM oldalon, amelyre már teljesül a párhuzamoság: $XY' \parallel LM$.

Az alaptétel miatt ekkor felírható: $\frac{KX}{KL} = \frac{KY'}{KM}$.

Azonban a kiindulási feltételezésünkéből tudjuk, hogy $\frac{KX}{KL} = \frac{KY}{KM}$. A két egyenlet bal oldalának egyenlőségéből következik a jobb oldalak egyenlősége:

$$\frac{KY'}{KM} = \frac{KY}{KM} \implies KY' = KY \implies Y' \equiv Y.$$

Mivel a két pont egybeesik, ellentmondásra jutottunk: az eredeti XY egyenesnek már eleve párhuzamosnak kellett lennie!



Gyakorlati alkalmazások és feladatok

1. Háromszög oldalhosszainak számítása:

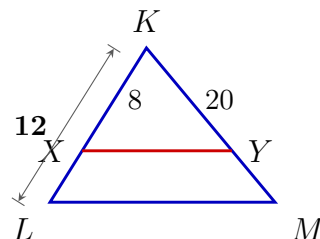
Az ábrán látható KLM_{Δ} -ben $XY \parallel LM$. Adatok: $KX = 8$ cm, $KL = 12$ cm és $KM = 20$ cm. Határozzuk meg a KY és az YM szakaszok hosszát!

Megoldás: Thalész tétele alapján felírjuk a felső rész és a teljes oldal arányát:

$$\frac{KX}{KL} = \frac{KY}{KM} \implies \frac{8}{12} = \frac{KY}{20}$$
$$KY = \frac{8 \cdot 20}{12} = \frac{160}{12} = \frac{40}{3} \approx 13,33 \text{ cm.}$$

A maradék szakasz kiszámítása kivonással:

$$YM = KM - KY = 20 - \frac{40}{3} = \frac{20}{3} \approx 6,67 \text{ cm.}$$



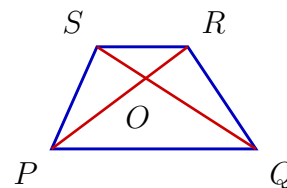
2. Trapéz átlóinak metszéspontja:

Egy $PQRS$ trapézban az alapok párhuzamosak ($PQ \parallel RS$), az átlók metszéspontját jelölje O . Adott: $PO = 24$ cm, $OR = 8$ cm és $QO = 30$ cm. Milyen hosszú az OS szakasz?

Megoldás: Vizsgáljuk az OPQ_{Δ} és ORS_{Δ} kapcsolatát! Mivel $RS \parallel PQ$, a szelőtétel (csúcsszög mögötti II. eset) közvetlenül alkalmazható:

$$\frac{PO}{OR} = \frac{QO}{OS} \implies \frac{24}{8} = \frac{30}{OS} \implies 3 = \frac{30}{OS}$$

$$OS = \frac{30}{3} = 10 \text{ cm.}$$

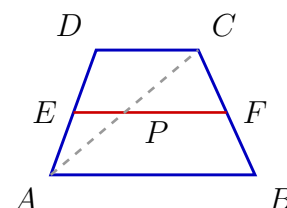


3. Trapéz szárának arányos osztása:

Az $ABCD$ trapézban $AB \parallel CD$, és behúzzuk az $EF \parallel AB$ szakaszát ($E \in AD, F \in BC$). Igazoljuk, hogy $\frac{DE}{EA} = \frac{CF}{FB}$!

Bizonyítás: Húzzuk be a trapéz AC átlóját, amely az EF szakaszt egy P pontban metszi!

- Az ACD_{Δ} -ben $EP \parallel CD$, így Thalész tétele szerint: $\frac{DE}{EA} = \frac{CP}{PA}$.
- Az CAB_{Δ} -ben $PF \parallel AB$, így ugyancsak teljesül: $\frac{CF}{FB} = \frac{CP}{PA}$.



Mivel mindkét aránypár megegyezik a $\frac{CP}{PA}$ belső átló-aránnyal, a két szár aránya is egyenlő: $\frac{DE}{EA} = \frac{CF}{FB}$.

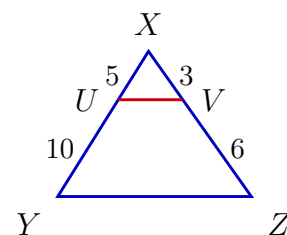
4. Párhuzamosság ellenőrzése a fordított tétellel:

A XYZ_{Δ} -ben $U \in (XY)$ és $V \in (XZ)$ pontokat úgy vettük fel, hogy $XU = 5$ cm, $UY = 10$ cm, $XV = 3$ cm és $VZ = 6$ cm. Igazoljuk, hogy az UV egyenes párhuzamos az alapoldallal ($UV \parallel YZ$)!

Bizonyítás: Írjuk fel a megfelelő oldaldarabok arányait mindkét száron:

$$\frac{XU}{UY} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}, \quad \frac{XV}{VZ} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Mivel a két arány megegyezik ($\frac{XU}{UY} = \frac{XV}{VZ}$), Thalész tételének fordított tétele alapján kimondható a párhuzamosság: $UV \parallel YZ$.



4. Adott szakasz arányos felosztása

Az egyenlő közül párhuzamosok tételének, illetve Thalész tételének segítségével nemcsak egyenlő részekre tudunk bontani egy adott geometriai szakaszt, hanem bármilyen megadott arány szerint is. A szerkesztés elve mindkét esetben azonos: egy segéd-félegyenesre felmérjük a kívánt arányokat, majd párhuzamos szelők vetítésével átvisszük azokat az eredeti szakaszra.

1. eset: Felosztás adott számokkal arányos részekre

Szakasz felosztása számadott arányban

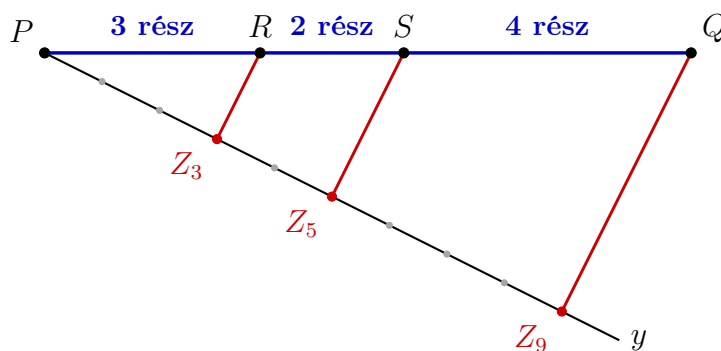
Egy adott szakaszt úgy osztunk fel megadott $n_1, n_2, \dots, n_k$ számokkal arányos részekre, hogy a végpontból induló segéd-félegyenesre egységnyi lépésekben felmérjük a számok összegét ($n_1 + n_2 + \dots + n_k$), majd az így kapott végpontot összekötve a szakasz másik végpontjával, ezzel a vetítővonallal párhuzamosakat húzunk a rész-összegek pontjaiból.

Mintafeladat: Osszuk fel a $PQ = 9$ cm hosszúságú szakaszt a 3, 2 és 4 számokkal arányos részekre!

$$\text{Elvárt arány: } \frac{PR}{3} = \frac{RS}{2} = \frac{SQ}{4}$$

A szerkesztés lépései:

1. Húzzunk a P végpontból egy tetszőleges szögben hajló Py segéd-félegyeneset!
2. Adjuk össze az arányszámokat: $3+2+4 = 9$. Nyissuk a körzőt egy tetszőleges (kényelmes) egységre, és mérjük fel ezt egymás után 9-szer a Py félegyenesre ($Z_1, Z_2, \dots, Z_9$ pontok).
3. A minket érdeklő osztópontok az arányok halmozott összegeinél lesznek:
 - az első rész vége: 3 egység $\implies$
 - a második rész vége: $3 + 2 = 5$ egység $\implies$
 - a teljes hossz vége: $3 + 2 + 4 = 9$ egység $\implies$
4. Kötössük össze az utolsó Z_9 pontot a szakasz Q végpontjával!
5. Tolóvonalzó segítségével húzzunk párhuzamosakat a Z_9Q egyenessel a Z_3 és Z_5 pontokból! Az egyenesek a PQ szakaszból kimetszik a keresett R és S pontokat, így a keletkező hasonlósági PZ_9Q_Δ alapján felírható a pontos arányosság.



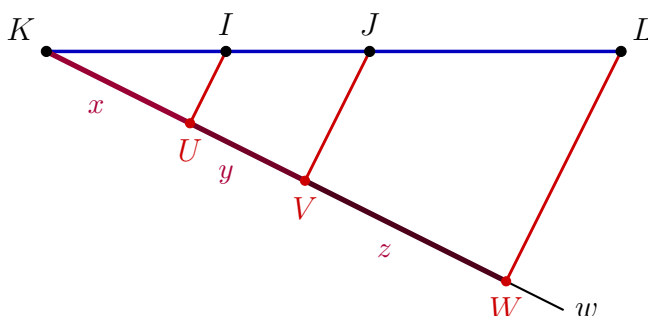
2. eset: Felosztás megadott geometriai szakaszokkal arányosan

Ha nem elméleti arányszámok, hanem konkrét, megrajzolt szakaszok (x, y és z) vannak megadva, az eljárás teljesen analóg módon történik: számlálás helyett körzővel másoljuk át a szakaszokat a segéd-félegyenesre.

Mintafeladat: Adott egy KL szakasz, valamint három segédszakasz: x, y és z . Osszuk fel a KL szakaszt az I és J pontokkal úgy, hogy teljesüljön az alábbi arányosság:

$$\frac{KI}{x} = \frac{IJ}{y} = \frac{JL}{z}$$

Adott szakaszok: $\underline{\hspace{1cm}x\hspace{1cm}} \quad \underline{\hspace{1cm}y\hspace{1cm}} \quad \underline{\hspace{1cm}z\hspace{1cm}}$



A szerkesztés menete:

1. Vegyünk fel a K pontból egy tetszőleges Kw félegyeneset!
2. A körző segítségével egymás után, hézagmentesen mérjük fel a Kw félegyenesre az x, y és z szakaszokat! Így kapjuk meg sorrendben az U, V és W pontokat ($KU = x$, $UV = y$ és $VW = z$).
3. Kötössük össze a legutolsó W pontot a szakasz L végpontjával!
4. Tolóvonalzóval húzzunk a WL egyenessel párhuzamosokat az U és V pontokon keresztül! Ezek az egyenesek kimetszik a KL szakaszból az I és J pontokat.
5. A párhuzamos szelők tétele (Thalész tétele) alapján az egyenesek aránytartóan vetítenek, ezért a keletkező szakaszok hossza pontosan arányos lesz a felmért x, y és z darabokkal.

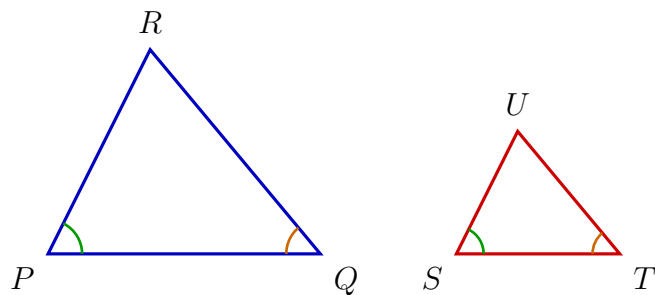
5. Hasonló háromszögek fogalmazása és tulajdonságai

Hasonló háromszögek

Két háromszöget hasonlónak nevezünk, ha a megfelelő szögek páronként egyenlők (kongruensek), és a megfelelő oldalaik aránya minden oldalpár esetén megegyezik. A hasonlóság matematikai jele: „ $\sim$ ”.

Az ábrán látható két háromszög hasonló egymáshoz ($PQR_{\Delta} \sim STU_{\Delta}$), mivel teljesülnek a geometriai feltételek:

$$\hat{P} \equiv \hat{S}, \quad \hat{Q} \equiv \hat{T}, \quad \hat{R} \equiv \hat{U} \quad \text{és} \quad \frac{PQ}{ST} = \frac{QR}{TU} = \frac{PR}{SU}.$$



A betűrend fontossága a hasonlóság felírásában

A hasonlóság felírásakor a csúcsok betűsorrendje szigorúan kötött: mindig a megegyező szögek csúcsai kerülnek azonos pozícióba! A megfelelő oldalak pedig a kongruens szögekkel szemben fekvő oldalak lesznek.

Ha azt írjuk fel, hogy $XYZ_{\Delta} \sim MNO_{\Delta}$, az a betűsorrend alapján automatikusan az alábbi szigorú megfeleléseket jelenti:

- **Szögek egyenlősége:** Az 1. betű az 1. betűhöz, a 2. a 2.-hoz, a 3. a 3.-hoz tartozik:

$$\hat{X} \equiv \hat{M}, \quad \hat{Y} \equiv \hat{N}, \quad \hat{Z} \equiv \hat{O}.$$

- **Oldalak aránya:** Az első háromszög oldalai mindig a törtek számlálójába, a második háromszög oldalai a nevezőbe kerülnek:

$$\frac{XY}{MN} = \frac{YZ}{NO} = \frac{XZ}{MO} = k.$$

Hasonlósági arány

Két hasonló háromszög megfelelő oldalainak hányadosát a hasonlóság arányának nevezzük, és k -val jelöljük. Ha $XYZ_{\Delta} \sim X'Y'Z'_{\Delta}$, akkor:

$$\frac{XY}{X'Y'} = \frac{YZ}{Y'Z'} = \frac{XZ}{X'Z'} = k.$$

Gyakorló feladat (Hasonlósági arány és oldalhosszak számítása)

Feladat: Tudjuk, hogy az XYZ_{Δ} hasonló az $X'Y'Z'_{\Delta}$ -hez ($XYZ_{\Delta} \sim X'Y'Z'_{\Delta}$). Az első háromszög oldalai: $XY = 12$ cm, $YZ = 16$ cm és $XZ = 20$ cm. A második háromszög leghosszabb oldala $X'Z' = 50$ cm.

- Határozzuk meg a hasonlósági arány (k) pontos értékét!
- Számítsuk ki a második háromszög ismeretlen oldalainak ($X'Y'$ és $Y'Z'$) hosszát!

Megoldás:

- A hasonlósági arány (k) kiszámítása:**

A megadott betűrend alapján az XZ oldal párja az $X'Z'$ oldal. Írjuk fel a két ismert megfelelő oldal arányát (figyelve, hogy az első háromszög adata kerüljön a számlálóba):

$$k = \frac{XZ}{X'Z'} = \frac{20}{50} = \frac{2}{5} = 0,4.$$

- Az ismeretlen oldalak meghatározása:**

A $k = \frac{2}{5}$ arányosságot felhasználva felírjuk az aránypárokat a többi oldalra is:

- Az $X'Y'$ oldal számítása:

$$\frac{XY}{X'Y'} = k \implies \frac{12}{X'Y'} = \frac{2}{5} \implies 2 \cdot X'Y' = 12 \cdot 5 \implies X'Y' = \frac{60}{2} = 30 \text{ cm.}$$

- Az $Y'Z'$ oldal számítása:

$$\frac{YZ}{Y'Z'} = k \implies \frac{16}{Y'Z'} = \frac{2}{5} \implies 2 \cdot Y'Z' = 16 \cdot 5 \implies Y'Z' = \frac{80}{2} = 40 \text{ cm.}$$

(Ellenőrzés: Az új oldalak aránya is pontosan $\frac{2}{5}$, hiszen $\frac{12}{30} = \frac{2}{5}$ és $\frac{16}{40} = \frac{2}{5}$.)

6. A hasonlóság alaptétele

A hasonlóság alaptétele

Ha egy háromszög valamelyik oldalával párhuzamos egyenest húzunk, az az eredeti háromszög másik két oldalából (vagy azok meghosszabbításaiból) egy olyan új háromszöget metsz ki, amely hasonló az eredeti háromszöghöz.

Feltétel (F): $XY \parallel LM$, ahol $X \in (KL)$ és $Y \in (KM)$.

Következmény (K): $KXY_{\Delta} \sim KLM_{\Delta}$

A tétel bizonyítása

1. Szögek vizsgálata:

Mivel a feltétel szerint az XY szelő párhuzamos az LM alappal ($XY \parallel LM$), az egyállású szögek tulajdonságai miatt a megfelelő szögek megegyeznek:

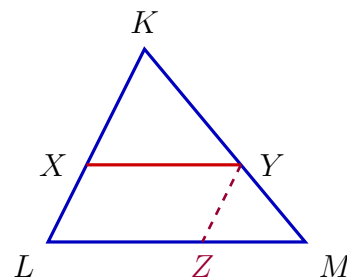
$$\widehat{KXY} \equiv \widehat{KLM} \quad \text{és} \quad \widehat{KYZ} \equiv \widehat{KML}.$$

A K csúcsnál lévő szög közös ($\widehat{XKY} \equiv \widehat{LKM}$). Ebből következik, hogy a két háromszög szögei páronként kongruensek.

2. Oldalak arányának vizsgálata:

Thalész tétele alapján a szárakra felírható az arányosság:

$$\frac{KX}{KL} = \frac{KY}{KM}.$$



Ahhoz, hogy a harmadik oldalpár (XY és LM) arányát is bevonjuk, húzzunk az Y pontból egy segédegyenest, amely párhuzamos a KL szárral ($YZ \parallel KL$, ahol $Z \in LM$)!

Mivel $YZ \parallel KL$, Thalész tételét most a másik irányból alkalmazva kapjuk:

$$\frac{KY}{KM} = \frac{LZ}{LM}.$$

Figyeljük meg a keletkező $LZYX$ négyszöget! Mivel szemközti oldalai szerkesztésükből adódóan párhuzamosak ($XY \parallel LZ$ és $XL \parallel YZ$), ez a négyszög egy **paralelogramma**. A paralelogramma szemközti oldalai pedig egyenlő hosszak: $LZ \equiv XY$.

Ezt a geometriai egyenlőséget behelyettesítve az előző aránypárba megkapjuk a harmadik oldal arányát is:

$$\frac{LZ}{LM} = \frac{XY}{LM} \implies \frac{KX}{KL} = \frac{KY}{KM} = \frac{XY}{LM}.$$

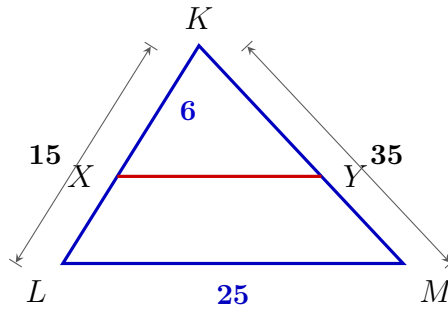
Mivel mind a három oldalpár aránya megegyezik, a két háromszög valóban hasonló: $KXY_{\Delta} \sim KLM_{\Delta}$.

Megjegyzés: A hasonlóság alaptétele kiegészíti és teljessé teszi Thalész tételét azzal, hogy a párhuzamos szelő szakasz hosszát is bevonja az arányosságba.

Gyakorlati alkalmazás és mintafeladat

Feladat: Adott a KLM_{Δ} , amelyben berajzoltuk az alappal párhuzamos XY szelőt ($XY \parallel LM$, ahol $X \in (KL)$ és $Y \in (KM)$). Ismerjük a nagy háromszög oldalainak hosszát: $KL = 15$ cm, $LM = 25$ cm és $KM = 35$ cm. Tudjuk továbbá, hogy a levágott kis háromszög bal oldali szára $KX = 6$ cm.

Számítsuk ki a kis KXY_{Δ} hiányzó oldalainak (KY és XY) hosszát!



Megoldás:

Mivel $XY \parallel LM$, a hasonlóság alaptétele értelmében a kis háromszög hasonló a nagy háromszöghöz ($KXY_{\Delta} \sim KLM_{\Delta}$). Írjuk fel a megfelelő oldalak hányadosait:

$$\frac{KX}{KL} = \frac{KY}{KM} = \frac{XY}{LM}$$

Helyettesítsük be az ismert számadatokat az összefüggésbe:

$$\frac{6}{15} = \frac{KY}{35} = \frac{XY}{25}$$

Az arányosságot külön-külön megoldva megkapjuk a keresett oldalakat:

- A KY oldal hossza:

$$\frac{6}{15} = \frac{KY}{35} \implies KY = \frac{6 \cdot 35}{15} = \frac{210}{15} = 14 \text{ cm.}$$

- Az XY párhuzamos szelő hossza:

$$\frac{6}{15} = \frac{XY}{25} \implies XY = \frac{6 \cdot 25}{15} = \frac{150}{15} = 10 \text{ cm.}$$

Ellenőrzés: A hasonlósági arány $k = \frac{6}{15} = 0,4$. Az új oldalak aránya is pontosan ugyanennyi: $\frac{14}{35} = 0,4$ és $\frac{10}{25} = 0,4$.

7. A háromszögek hasonlósági alapesetei

Ahhoz, hogy két háromszögről megállapítsuk a hasonlóságot, nem szükséges az összes oldal és az összes szög arányát egyesével ellenőrizni. Elegendő, ha teljesül a három alapvető hasonlósági kritérium valamelyike.

I. hasonlósági eset

I. hasonlósági alapeset

Két háromszög hasonló egymáshoz, ha két-két szögük páronként egyenlő (kongruens). Mivel a belső szögek összege mindig 180° , ebből automatikusan következik a harmadik szög egyenlősége is.

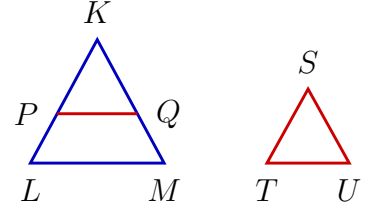
Feltétel (F): A KLM_{Δ} és STU_{Δ} háromszögekben $\hat{K} \equiv \hat{S}$ és $\hat{L} \equiv \hat{T}$.

Következmény (K): $KLM_{\Delta} \sim STU_{\Delta}$

Bizonyítás menete:

Vegyünk fel a nagyobb KLM_{Δ} oldalain egy $P \in (KL)$ és egy $Q \in (KM)$ pontot úgy, hogy a lezáró szakasz párhuzamos legyen az alappal ($PQ \parallel LM$), és a bal oldali szár hossza megegyezzen a kis háromszög oldalával ($KP \equiv ST$)!

1. A hasonlóság alaptételéből közvetlenül következik, hogy a levágott kis háromszög hasonló az eredetihez: $KPQ_{\Delta} \sim KLM_{\Delta}$. (1)
2. Vizsgáljuk a szögeket! Mivel $PQ \parallel LM$, az egyállású szögek miatt $\widehat{KPQ} \equiv \widehat{KLM}$. A feltételezés szerint viszont $\widehat{KLM} \equiv \widehat{STU}$, ezért $\widehat{KPQ} \equiv \widehat{STU}$.
3. A KPQ_{Δ} és STU_{Δ} háromszögek egybevágók ($KPQ_{\Delta} \equiv STU_{\Delta}$ a Sz-O-Sz alapeset szerint), mert:
 - az ST oldalt egyenlőre szerkesztettük ($KP \equiv ST$),
 - a rajta fekvő két szög egyenlő ($\hat{K} \equiv \hat{S}$ és $\widehat{KPQ} \equiv \widehat{TU}$).
4. Az egybevágóságból adódik, hogy a két háromszög mindenben megegyezik. Ezt összevetve az (1) megállapítással megkapjuk a végső hasonlóságot: $KLM_{\Delta} \sim STU_{\Delta}$.



II. hasonlósági eset

II. hasonlósági alapeset

Két háromszög hasonló, ha egy-egy szögük egyenlő (kongruens), és az ezen szögeket közrezáró két oldalpár aránya megegyezik.

Feltétel (F): A KLM_{Δ} és STU_{Δ} háromszögekben $\hat{K} \equiv \hat{S}$, és a szárak aránya egyenlő:

$$\frac{KL}{ST} = \frac{KM}{SU}.$$

Következmény (K): $KLM_{\Delta} \sim STU_{\Delta}$

Bizonyítás vázlata: Helyezzük fel ismét a $P \in (KL)$ és $Q \in (KM)$ pontokat úgy, hogy $KP \equiv ST$ és $KQ \equiv SU$ teljesüljön! Mivel a felső $\hat{K}$ szög megegyezik az $\hat{S}$ szöggel, az O-Sz-O egybevágósági tétel alapján a KPQ_{Δ} tökéletes másolata (egybevágója) az STU_{Δ} -nek. A megadott oldalarányok miatt Thalész megfordított tételéből következik, hogy $PQ \parallel LM$, így a hasonlóság alaptétele igazolja, hogy $KLM_{\Delta} \sim STU_{\Delta}$.

III. hasonlósági eset

III. hasonlósági alapeset

Két three-szög hasonló egymáshoz, ha a megfelelő oldalaik páronként mind a három oldalpár esetén megegyező arányban állnak egymással.

Feltétel (F): $\frac{KL}{ST} = \frac{LM}{TU} = \frac{KM}{SU}$

Következmény (K): $KLM_{\Delta} \sim STU_{\Delta}$

Bizonyítás vázlata: Mivel az összes oldalpár aránya azonos, a korábbiakhoz hasonlóan felmérve a $KP \equiv ST$ és $PQ \parallel LM$ szakaszt, a hasonlóság alaptétele alapján keletkező kis KPQ_{Δ} harmadik oldala (PQ) pontosan megegyezik a TU oldallal ($PQ \equiv TU$). Így az O-O-O egybevágóság miatt a kis háromszög megegyezik az STU_{Δ} -nel, tehát az eredeti nagy háromszög is hasonló hozzá.

8. A hasonlóság következményei és alkalmazásai

1. Magasságok és területek aránya

Hasonló háromszögek magasságai és területe

Ha két háromszög hasonló egymáshoz, és a hasonlósági arányuk k , akkor:

- a megfelelő magasságaik aránya is pontosan megegyezik a hasonlósági aránnyal (k),
- a két háromszög területének aránya a hasonlósági arány négyzetével (k^2) egyenlő!

Bizonyítás (a magasságok arányára):

Legyenek az alapokhoz tartozó magasságok $h_K \perp LM$ és $h_S \perp TU$, amelyek az alapokat a D , illetve az E pontban metszik.

Vizsgáljuk a kialakuló derékszögű KLD_{Δ} és STE_{Δ} háromszögeket!

- A magasságok szerkesztése miatt mindkettőben találunk egy derékszöget ($\hat{D} = \hat{E} = 90^\circ$).
- A nagy háromszögek hasonlósága miatt a bal alsó szögek egyenlők ($\hat{L} = \hat{T}$).

Az I. hasonlósági eset (Sz-Sz) értelmében a két levágott kis derékszögű háromszög is hasonló ($KLD_{\Delta} \sim STE_{\Delta}$). A hasonlóság miatt felírható a megfelelő oldalak hányadosa:

$$\frac{h_K}{h_S} = \frac{KD}{SE} = \frac{KL}{ST} = k.$$

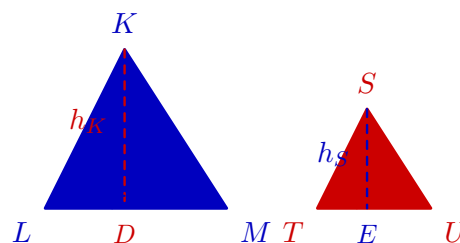
Tehát a magasságok aránya valóban megegyezik a hasonlósági aránnyal (k).

Bizonyítás (a területek arányára):

Írjuk fel mindkét háromszög területét az alapvető $T = \frac{\text{alap} \cdot \text{magasság}}{2}$ képlettel, majd képezzük a hányadosukat:

$$\frac{T_{KLM}}{T_{STU}} = \frac{\frac{LM \cdot h_K}{2}}{\frac{TU \cdot h_S}{2}} = \frac{LM \cdot h_K}{TU \cdot h_S} = \left(\frac{LM}{TU} \right) \cdot \left(\frac{h_K}{h_S} \right)$$

Mivel a feltétel szerint az oldalak aránya $\frac{LM}{TU} = k$, továbbá az előző alpontban igazoltuk,



hogy a megfelelő magasságok aránya is $\frac{h_K}{h_S} = k$, a behelyettesítést követően megkapjuk a tétel állítását:

$$\frac{T_{KLM}}{T_{STU}} = k \cdot k = \mathbf{k^2}.$$

2. Magasságok és oldalak szorzatának állandósága

Feladat: Egy tetszőleges XYZ_{Δ} -ben húzzuk meg mind a három magasságot: XX' , YY' és ZZ' ! Igazoljuk, hogy az oldal és a hozzá tartozó magasság szorzata minden oldalpár esetén állandó, azaz:

$$XY \cdot ZZ' = YZ \cdot XX' = XZ \cdot YY'$$

Bizonyítás:

Vizsgáljuk az XYX'_{Δ} és ZYZ'_{Δ} derékszögű háromszögeket!

- A magasságok miatt mindkét háromszög derékszögű ($\hat{X}' \equiv \hat{Z}' = 90^\circ$).
- Az $\hat{Y}$ (a jobb alsó csúcs szöge) közös mindkét háromszögben.

Az I. hasonlósági alapeset értelmében a két háromszög hasonló: $XYX'_{\Delta} \sim ZYZ'_{\Delta}$.

Írjuk fel a megfelelő átfogók és magasság-befogók arányát:

$$\frac{XX'}{ZZ'} = \frac{XY}{YZ}.$$

Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát a nevezőkkel (keresztmetszés):

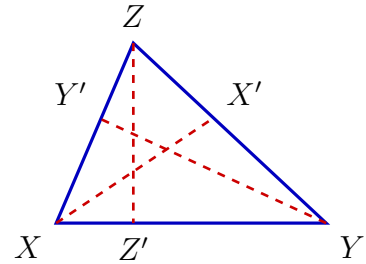
$$XY \cdot ZZ' = YZ \cdot XX'. \quad (1)$$

Teljesen analóg módon, a másik két magasság által bezárt derékszögű háromszögek hasonlóságából ($XYX'_{\Delta} \sim ZYZ'_{\Delta}$) igazolható, hogy:

$$XY \cdot ZZ' = XZ \cdot YY'. \quad (2)$$

Az (1) és (2) egyenleteket összevetve megkapjuk a kívánt teljes egyenlőséget:

$$XY \cdot ZZ' = YZ \cdot XX' = XZ \cdot YY'.$$



A háromszög területe 3-féleképpen

Ha a fenti egyenlőségsorozat minden tagját elosztjuk 2-vel, akkor pontosan megkapjuk a háromszög alapvető területképletét, mind a három oldalpárra felírva:

$$T_{XYZ} = \frac{XY \cdot ZZ'}{2} = \frac{YZ \cdot XX'}{2} = \frac{XZ \cdot YY'}{2} \quad \left(T = \frac{\text{oldal} \cdot \text{hozzá tartozó magasság}}{2} \right).$$