

A valós számok halmaza

7. osztály

1. Négyzetgyökvonás

Definíció: Teljes négyzet

Egy n természetes számot akkor hívunk **teljes négyzetnek** (vagy négyzetszámnak), ha létezik olyan egész szám, amelyet önmagával megszorozva pont az n értékét kapjuk.

Például: A 64 és a 225 négyzetszámok, mivel $64 = 8^2 = (-8)^2$, illetve $225 = 15^2 = (-15)^2$.

Definíció: A négyzetgyökvonás fogalma

A négyzetgyökvonás lényegében a második hatványra emelés (négyzetre emelés) megfordított művelete. Egy nemnegatív (pozitív vagy nulla) valós szám négyzetgyöke az a nemnegatív szám, amelyet négyzetre emelve a gyökjel alatti értéket kapjuk vissza. Jelölése: $\sqrt{}$.

- Ha $x, y \in \mathbb{Q}_+$ és $x = y^2$, akkor $\sqrt{x} = y$.
- Továbbá, ha $x \in \mathbb{Q}_+$, $y \in \mathbb{Q}$ és $x = y^2$, akkor $\sqrt{x} = |y|$ (azaz a szám abszolút értéke).

Alapvető példák és tudnivalók

- $\sqrt{16} = 4$, mert $4^2 = 16$ és $4 \geq 0$.
- $\sqrt{100} = 10$, mert $10^2 = 100$.
- $\sqrt{(-6)^2} = |-6| = 6$.
- $\sqrt{1,44} = \sqrt{1,2^2} = 1,2$.

Alapvető kikötés: A négyzetgyök értéke és a gyökjel alatti szám sem lehet soha negatív a valós számok körében! A gyökvonás eredménye mindig ≥ 0 .

Nagyobb számok gyökvonása prímtényezős bontással

Ha nem látjuk azonnal a gyök értékét, érdemes a számot prímtényezők szorzatára bontani, majd a hatványkitevőket megfelelni:

1. $\sqrt{1296} = \sqrt{2^4 \cdot 3^4} = \sqrt{(2^2 \cdot 3^2)^2} = 2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36$.
2. $\sqrt{324} = \sqrt{2^2 \cdot 3^4} = 2^1 \cdot 3^2 = 2 \cdot 9 = 18$.

Írásbeli négyzetgyökvonás algoritmus (Egész számok)

A munkafüzetben bemutatott eljárás lépései egy egyedi példán ($\sqrt{73441} = 271$) keresztül bemutatva:

1. A számjegyeket hátulról haladva kettes csoportokra tagoljuk: $7'34'41$.
2. Az első csoport a 7. Ennek keressük a legnagyobb olyan négyzetszámot, ami még nem nagyobb nála: ez a 4, aminek a gyöke 2. A 2-est felírjuk az eredménybe. A 7-ből kivonjuk a 4-et, marad a 3.
3. Lehozzuk a következő számcsoporthoz (34), így kapjuk a 334-et.
4. A jelenlegi eredmény (2) kétszeresét (4) leírjuk balra. A 334 utolsó számjegyét letakarva megvizsgáljuk, hogy a 33-ban a 4 hányszor van meg: legfeljebb 7-szer. Így a próbálkozás: $47 \cdot 7 = 329$. Mivel $329 \leq 334$, ez megfelel. A 7-est beírjuk az eredménybe (a 2 mellé).
5. A kivonás után maradt 5, mellé hozzuk az utolsó csoportot (41), kapjuk az 541-et.
6. A mostani eredmény (27) kétszerese 54. Az 541-ben az 54 pontosan 1-szer van meg: $541 \cdot 1 = 541$. Maradék nincs, az eredmény tehát $\sqrt{73441} = 271$.

Tizedestörtek és törtekifejezések

Gyökvonás tizedestörtekből: Tizedestörtek esetén a kettes csoportosítást a tizedesvesszőtől indulva mindkét irányba kell elvégezni. Amikor a számítás során elérjük a tizedesvesszőt (lehozzuk az első tizedesjegyeket tartalmazó csoportot), a kapott eredményben is azonnal ki kell tenni a tizedesvesszőt! Ha egy szám nem teljes négyzet, tetszőleges pontossággal számolhatunk úgy, hogy a tizedesvessző után párban nullákat írunk hozzá (00, 00...). Két tizedesjegy pontossághoz legalább két pár nullára van szükség.

Tétel: Törtek és szorzatok négyzetgyöke

Két fontos azonosság a négyzetgyökök műveleteihez:

- **Törtből úgy vonunk gyököt**, hogy a számlálóból és a nevezőből külön-külön gyököt vonunk (ha a nevező nem nulla):

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (a \geq 0, b > 0)$$

- **Szorzatból úgy vonhatunk gyököt**, hogy a nemnegatív tényezőkből külön-külön vonunk gyököt, majd az eredményeket összeszorozzuk:

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad (a \geq 0, b \geq 0)$$

Példák az azonosságokra:

$$\sqrt{\frac{16}{49}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{49}} = \frac{4}{7}, \quad \sqrt{25 \cdot 36} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{36} = 5 \cdot 6 = 30$$

Hatványok gyöke és egybevonás: A fenti szabály megfordítva is igaz: $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{x \cdot y}$. Ezt használhatjuk, ha a tagok külön-külön nem négyzetszámok, de a szorzatuk már az:

$$\sqrt{8} \cdot \sqrt{18} = \sqrt{8 \cdot 18} = \sqrt{144} = 12$$

Hatványok gyökvonásánál pedig a kitévőt felezzük:

$$\sqrt{3^{12}} = 3^6 = 729 \quad \text{és} \quad \sqrt{(2^5)^2} = 2^5 = 32$$

2. Irracionális számok, a valós számok halmaza

Geometriai motiváció: Készítsünk egy olyan $ABCD$ négyzetet, amelynek oldalait felezve és a felezőpontokat összekötve egy új, belső $EFGH$ négyzetet kapunk. Ha a külső négyzet oldala $AB = 2$ egység, akkor a belső négyzet területe a külső területének a fele:

$$T_{EFGH} = \frac{AB^2}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ területegység.}$$

Mivel a négyzet területe az oldalának a négyzete ($EF^2 = 2$), ebből következik, hogy az $EFGH$ négyzet oldalhossza pontosan $EF = \sqrt{2}$. Ez a hosszúság fizikailag is megrajzolható, tehát létezik a számegyenesen olyan pont, amely az origótól pont ekkora távolságra van.

Tétel: A $\sqrt{2}$ nem racionális szám

Bizonyítsuk be indirekt módon, hogy a $\sqrt{2}$ nem írható fel két egész szám hányadosaként (törtként)!

Bizonyítás. Tegyük fel az ellenkezőjét: létezik olyan $\frac{p}{q}$ alakú tört, amely megegyezik a $\sqrt{2}$ -vel, ahol $p, q \in \mathbb{N}^+$ és a törtet már a végletekig egyszerűsítettük (azaz p -nek és q -nak nincs közös osztója, nem lehet mindkettő páros).

Írjuk fel az egyenletet, majd emeljük mindkét oldalt négyzetre:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \quad \implies \quad 2 = \frac{p^2}{q^2} \quad \implies \quad p^2 = 2q^2$$

Mivel a $2q^2$ egy páros szám, ezért p^2 -nek is párosnak kell lennie. Egy négyzetszám viszont csak akkor lehet páros, ha maga az alap (p) is páros. Írjuk fel tehát p -t úgy, hogy $p = 2k$ (ahol k egy pozitív egész szám).

Helyettesítsük vissza ezt az eredeti egyenletünkbe:

$$(2k)^2 = 2q^2 \quad \implies \quad 4k^2 = 2q^2 \quad \implies \quad q^2 = 2k^2$$

Ebből a formából jól látszik, hogy most már a q^2 is egy páros szám, ami azt jelenti, hogy magának a q -nak is párosnak kell lennie!

Ellentmondás: A levezetés során arra jutottunk, hogy a p és a q is páros számok (oszthatók 2-vel). Ez azonban ellentmond annak a kezdeti feltételünknek, hogy a $\frac{p}{q}$ tört nem egyszerűsíthető tovább! Emiatt az eredeti feltevésünk hamis: a $\sqrt{2}$ semmiképpen sem írható fel törtként. $\square$

Definíció: Az irracionális és valós számok

- **Irracionális számok ($\mathbb{Q}^*$ vagy $\mathbb{I}$):** Azok a számok, amelyek nem írhatók fel két egész szám hányadosaként. Tizedestört alakjuk mindig **végtelen, de nem szakaszos** (nem ismétlődik benne egy periodikus minta).

Példák irracionális számokra: $\sqrt{2} \approx 1,4142135\dots$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{15}$; a $\pi \approx 3,14159\dots$

- **Valós számok halmaza ($\mathbb{R}$):** A racionális ($\mathbb{Q}$) és az irracionális ($\mathbb{Q}^*$) számok halmaza együttesen alkotja a valós számok teljes halmazát.

$$\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^* = \mathbb{R} \quad \text{és} \quad \mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}^* = \emptyset \quad (\text{a két halmaznak nincs közös eleme}).$$

A számhalmazok közötti bővítési hierarchia (részhalmaz reláció):

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Jelölések a valós számok körében:

- $\mathbb{R}_+$: a pozitív valós számok halmaza (a nulla nem tartozik bele).
- $\mathbb{R}_-$: a negatív valós számok halmaza.
- $\mathbb{R}_0^+$ vagy $\mathbb{R}_+$ a 0-val együtt: a nemnegatív valós számok halmaza.
- $\mathbb{R}^*$ vagy $\mathbb{R} \setminus \{0\}$: a nulla kivételével az összes valós szám.

Ellentett számok és a számegyenes

Bármely $x \in \mathbb{R}$ valós szám ellentettjét $-x$ -szel jelöljük. A számegyenesen az ellentett számok az origóra (0-ra) nézve szimmetrikusan helyezkednek el. Például a $\sqrt{5}$ ellentettje $-\sqrt{5}$; a $-4\sqrt{3}$ ellentettje pedig $+4\sqrt{3}$.

Definíció: A valós szám abszolút értéke

Egy valós szám abszolút értéke geometriai szempontból nem más, mint a számegyenesen az origótól (0 ponttól) mért távolsága. Jelölése: $|x|$.

Mivel a távolság sohasem lehet negatív, egy pozitív szám és a nulla abszolút értéke önmaga, míg egy negatív szám abszolút értéke a szám ellentettje (azaz pozitív érték):

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq 0 \\ -x, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

Példák: $|- \sqrt{3}| = \sqrt{3}$; $|+ \sqrt{3}| = \sqrt{3}$; $|- \sqrt{15}| = \sqrt{15}$; $|3 - \sqrt{15}| = -(3 - \sqrt{15}) = \sqrt{15} - 3$ (mivel a $3 = \sqrt{9} < \sqrt{15}$, így a gyökjel alatti kifejezés negatív).

Tétel: A valós számok rendezése

Minden egyes valós számnak pontosan egy pont felel meg a számegyenesen. Ha két valós számot összehasonlítunk, akkor az a nagyobb, amelyik a számegyenesen jobbra helyezkedik el:

Ha x jobbra van y -től, akkor $x > y$.

Példák egyenlőtlenségekre: $\sqrt{7} > \sqrt{5} > \sqrt{3}$; illetve a negatív oldalon: $-\sqrt{3} > -\sqrt{5} > -\sqrt{7}$.

3. Számítási szabályok négyzetgyökökkel

Tényező kiemelése a gyökjel elé: Ha a gyökjel alatt szereplő szám önmagában nem teljes négyzet, de felbontható olyan tényezők szorzatára, amelyek közül legalább az egyik négyzetszám, akkor ebből a tényezőtől gyököt vonhatunk. A kapott értéket szorzóként kiírjuk a gyökjel elé.

$$1. \sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = \sqrt{4^2 \cdot 2} = 4\sqrt{2}$$

$$2. \sqrt{125} = \sqrt{25 \cdot 5} = \sqrt{5^2 \cdot 5} = 5\sqrt{5}$$

$$3. \sqrt{\frac{48}{25}} = \frac{\sqrt{16 \cdot 3}}{\sqrt{25}} = \frac{4\sqrt{3}}{5}$$

$$4. \sqrt{500} = \sqrt{100 \cdot 5} = 10\sqrt{5}$$

$$5. \sqrt{(-6)^2 \cdot 3} = |-6| \cdot \sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

Tényező bevitele a gyökjel alá: A kiemelés fordított eljárása, amikor egy gyökjel előtti szorzótényezőt szeretnénk a gyökjel alá vinni. Ezt úgy tehetjük meg, hogy a gyökjel előtti (nemnegatív) számot négyzetre emeljük, és beszorozzuk vele a gyökjel alatti értéket.

$$1. 3\sqrt{5} = \sqrt{3^2 \cdot 5} = \sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{45}$$

$$2. -4\sqrt{2} = -\sqrt{4^2 \cdot 2} = -\sqrt{16 \cdot 2} = -\sqrt{32} \quad (\text{Figyelem: a negatív előjel a gyökjel előtt marad!})$$

$$3. \frac{3}{4}\sqrt{\frac{8}{3}} = \sqrt{\frac{3^2}{4^2} \cdot \frac{8}{3}} = \sqrt{\frac{9}{16} \cdot \frac{8}{3}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Alkalmazás (Számok összehasonlítása): Melyik érték a nagyobb: $4\sqrt{3}$ vagy $3\sqrt{5}$?

Vigyünk be a tényezőket a gyökjel alá: $4\sqrt{3} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{48}$, míg $3\sqrt{5} = \sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{45}$. Mivel $48 > 45$, ezért $4\sqrt{3} > 3\sqrt{5}$.

Tétel: Összefoglaló számítási szabályok a valós számok körében

$$1. \sqrt{x^2} = |x|, \text{ minden } x \in \mathbb{R} \text{ esetén.}$$

$$2. (\sqrt{x})^2 = x, \text{ ha } x \in \mathbb{R}_0^+ \text{ (nemnegatív valós szám).}$$

$$3. \sqrt{x \cdot y} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}, \text{ ha } x, y \in \mathbb{R}_0^+.$$

$$4. \sqrt{x : y} = \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}, \text{ ha } x \in \mathbb{R}_0^+ \text{ és } y \in \mathbb{R}_+ (y > 0).$$

$$5. \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}, \text{ ha } x \in \mathbb{R}_0^+ \text{ és } y \in \mathbb{R}_+.$$

$$6. \sqrt{x^k} = (\sqrt{x})^k, \text{ ha } x \in \mathbb{R}_0^+ \text{ és } k \in \mathbb{Z} \text{ (egész szám).}$$

Példák az azonosságokra: $\sqrt{(-7)^2} = |-7| = 7$; $\sqrt{14^2} = 14$; $\sqrt{3 \cdot 11} = \sqrt{33}$; $\sqrt{\frac{5}{16}} = \frac{\sqrt{5}}{4}$.

Egy tört nevezőjének gyöktelenítése (Racionalizálás)

Gyöktelenítés elve: Ha egy matematikai kifejezésben tört szerepel, és annak nevezője irracionális gyökmennyiséget tartalmaz, matematikai szokás szerint a tört értékének megváltoztatása nélkül bővítést végzünk. Ennek célja, hogy a nevezőből eltűnjön a gyökjel, azaz a nevezőt racionális számmá alakítsuk.

Általános módszer egyszerű négyzetgyök esetén: Ha a nevezőben $\sqrt{a}$ szerepel, a tört számlálóját és nevezőjét is megszorozzuk $\sqrt{a}$ -val, mivel $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$.

1. $\frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$
2. $\frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$ (egyszerűsítés után)
3. $\frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{3}{\sqrt{4 \cdot 3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
4. $\frac{15\sqrt{3}}{\sqrt{75}} = \frac{15\sqrt{3}}{\sqrt{25 \cdot 3}} = \frac{15\sqrt{3}}{5\sqrt{3}} = 3$

4. Műveletek valós számokkal

Összeadás és kivonás

Egynemű gyöktagok összevonása: Pontos számítások során a gyökök helyett nem dolgozunk kerekített tizedestörtekkel, mert az eredmény is pontatlan lenne. Összeadásnál és kivonásnál csak azokat a tagokat tudjuk összevonni, amelyekben a **gyök alatti mennyiség (a gyökrész) teljesen megegyezik** — ezeket *egynemű tagoknak* nevezzük. Az összevonást úgy végezzük el, hogy a gyökjel előtti együtthatókat (szorzókat) algebrailag összevonjuk, maga a közös gyökrész pedig változatlan marad.

1. $5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 8\sqrt{3} - \sqrt{3} = (5 - 2 + 8 - 1)\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$
2. $4\sqrt{2} + 7\sqrt{5} - 6\sqrt{2} - 3\sqrt{5} + 10 = (4 - 6)\sqrt{2} + (7 - 3)\sqrt{5} + 10 = -2\sqrt{2} + 4\sqrt{5} + 10$
3. $2\sqrt{12} + 3\sqrt{27} - 5\sqrt{3} = 2(2\sqrt{3}) + 3(3\sqrt{3}) - 5\sqrt{3} = 4\sqrt{3} + 9\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$
4. $|2 - \sqrt{5}| + |\sqrt{5} - 3| - |\sqrt{5} - 1| = -(2 - \sqrt{5}) + -(\sqrt{5} - 3) - (\sqrt{5} - 1) = -2 + \sqrt{5} - \sqrt{5} + 3 - \sqrt{5} + 1 = 2 - \sqrt{5}$

(Magyarázat az abszolút értékekhez: mivel $2 < \sqrt{5}$ és $\sqrt{5} < 3$, az első két modulussban lévő kifejezés negatív volt, ezért az ellentettjükre változtak.)

Szorzás és osztás

Tétel: Gyökmennyiségek szorzása és osztása

Ha gyökmennyiséget gyökmennyiséggel szorzunk vagy osztunk, akkor külön-külön végezzük el a műveletet a racionális együtthatókon és a gyök alatti számokon:

$$(a\sqrt{x}) \cdot (b\sqrt{y}) = (a \cdot b)\sqrt{x \cdot y} \quad \text{és} \quad (a\sqrt{x}) : (b\sqrt{y}) = (a : b)\sqrt{x : y}$$

Ahol $a, b \in \mathbb{R}$ ($b \neq 0$) és $x, y \in \mathbb{R}_0^+$ ($y > 0$ osztásnál).

Kidolgozott példák szorzásra és osztásra:

1. $(4\sqrt{6}) \cdot (-3\sqrt{5}) = (4 \cdot (-3))\sqrt{6 \cdot 5} = -12\sqrt{30}$
2. $(-5\sqrt{3}) \cdot (-2\sqrt{12}) = +10\sqrt{36} = 10 \cdot 6 = 60$
3. $3\sqrt{2} \cdot (4\sqrt{2} - 5\sqrt{6}) = 3\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} - 3\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{6} = 12\sqrt{4} - 15\sqrt{12} = 24 - 30\sqrt{3}$
4. $(2\sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{3} - 2\sqrt{5}) = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} - 4\sqrt{15} + \sqrt{15} - 2\sqrt{25} = 6 - 3\sqrt{15} - 10 = -4 - 3\sqrt{15}$
5. $(12\sqrt{18}) : (-3\sqrt{2}) = (12 : (-3))\sqrt{18 : 2} = -4\sqrt{9} = -4 \cdot 3 = -12$
6. $(15\sqrt{12} - 10\sqrt{27} + 5\sqrt{3}) : (5\sqrt{3}) = 3\sqrt{4} - 2\sqrt{9} + 1 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 + 1 = 1$

Hatványozás

Tétel: Gyökmennyiségek hatványozása

Gyöket tartalmazó kifejezést úgy emelünk hatványra, hogy a gyök előtti együtthatót és magát a gyökrészt is külön-külön az adott hatványkitevőre emeljük:

$$(a\sqrt{x})^n = a^n \cdot (\sqrt{x})^n = a^n \cdot \sqrt{x^n} \quad (a \in \mathbb{R}, x \geq 0, n \in \mathbb{Z})$$

Az azonos alapú hatványokra, a nulla és negatív hatványkitevőkre tanult korábbi azonosságok változás nélkül érvényesek a valós számokra is!

Példák hatványozásra:

1. $(\frac{3}{4}\sqrt{7})^2 = (\frac{3}{4})^2 \cdot (\sqrt{7})^2 = \frac{9}{16} \cdot 7 = \frac{63}{16} = 3\frac{15}{16}$
2. $(-\frac{1}{3}\sqrt{2})^4 = (-\frac{1}{3})^4 \cdot (\sqrt{2})^4 = \frac{1}{81} \cdot \sqrt{2^4} = \frac{1}{81} \cdot \sqrt{16} = \frac{4}{81}$
3. $(-5\sqrt{13})^0 = 1$ (bármely 0-tól különböző valós szám nulladik hatványa 1)
4. $(-\frac{2}{5}\sqrt{3})^1 = -\frac{2}{5}\sqrt{3}$ (az első hatvány önmaga)
5. $(\sqrt{2})^3 \cdot (\sqrt{2})^5 = (\sqrt{2})^{3+5} = (\sqrt{2})^8 = \sqrt{2^8} = \sqrt{256} = 16$

A műveletek elvégzésének sorrendje

Tétel: A műveleti hierarchia alapjai

A valós számok halmazán a tanult matematikai műveleteket három szigorú prioritási szintre (rendre) tagoljuk:

- **I. Elsőrendű műveletek:** az összeadás és a kivonás.
- **II. Másodrendű műveletek:** a szorzás és az osztás.
- **III. Harmadrendű műveletek:** a hatványozás és a négyzetgyökvonás.

Az elvégzés szabálya: Számításkor mindig a legmagasabb rendű (harmadrendű) műveletekkel kezdünk, majd a másodrendűekkel folytatjuk, legvégül pedig az elsőrendű műveleteket végezzük el (balról jobbra haladva). Ha a kifejezés zárójeleket is tartalmaz, a sorrendet a zárójelek felülírják! Ekkor belülről kifelé haladunk: elsőként a kerek (), ezt követően a szögletes [], végül a kapcsos { } zárójelekben lévő műveleteket kell kiszámítani.

Kidolgozott mintapéldák összetett műveleti sorrendre:

1. $\left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \sqrt{256} - \frac{2}{9} \cdot \sqrt{81} - \frac{1}{8} \cdot \sqrt{64} = \frac{9}{16} \cdot 16 - \frac{2}{9} \cdot 9 - \frac{1}{8} \cdot 8 = 9 - 2 - 1 = 6.$
2. $5 + 3\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} - (\sqrt{98} + \sqrt{50}) : \sqrt{2} = 5 + 15\sqrt{4} - (\sqrt{49 \cdot 2} + \sqrt{25 \cdot 2}) : \sqrt{2} =$
 $= 5 + 15 \cdot 2 - (7\sqrt{2} + 5\sqrt{2}) : \sqrt{2} = 5 + 30 - (12\sqrt{2}) : \sqrt{2} = 35 - 12 \cdot 1 = 23.$

5. Számtani és mértani közép, súlyozott számtani közép

Definíció: A számtani és a mértani közép fogalma

- **Számtani közép (aritmetikai közép):** Több adott valós szám számtani közepét úgy kapjuk meg, hogy a számok összeadása után az eredményt elosztjuk az összeadandó tagok darabszámával. Két szám $(x, y \in \mathbb{R})$ esetén a képlete:

$$A(x, y) = \frac{x + y}{2}, \quad \text{általánosan } n \text{ darab számra: } A_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

- **Mértani közép (geometriai közép):** Két nemnegatív (pozitív vagy nulla) valós szám mértani közepe megegyezik a két szám szorzatából vont négyzetgyökkel:

$$G(x, y) = \sqrt{x \cdot y} \quad (x, y \in \mathbb{R}_0^+)$$

Tétel: A közepek közötti alapvető egyenlőtlenség

Bármely két pozitív valós szám $(a, b > 0)$ esetén a számtani közép mindig legalább akkora, mint a mértani közép. Az egyenlőség kizárólag akkor teljesül, ha a két szám megegyezik $(a = b)$:

$$\min(a, b) \leq \sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a + b}{2} \leq \max(a, b)$$

Definíció: Súlyozott számtani közép

A gyakorlatban (pl. az iskolai átlag kiszámításakor vagy fizikai tömegközéppontnál) az adatokat nem egyenrangúként kezeljük, hanem mindegyikhez egy fontossági értéket, úgynevezett **súlyt** (s_i) rendelünk. A súlyozott közép kiszámításához a számokat megszorozzuk a saját súlyukkal, a szorzatokat összeadjuk, majd az egészet elosztjuk a súlyok összegével:

$$A_s = \frac{x_1 \cdot s_1 + x_2 \cdot s_2 + \cdots + x_n \cdot s_n}{s_1 + s_2 + \cdots + s_n}$$

Gyakorlati mintapélda (Tanulmányi átlag): Ágnes matematikából kapott jegyei a félév során: három darab 3-as, két darab 4-es és egy darab 5-ös dolgozat (ahol az 5-ös duplán számít, tehát a súlya 2). Hányasra áll Ágnes?

$$A_s = \frac{3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 2}{3 + 2 + 2} = \frac{9 + 8 + 10}{7} = \frac{27}{7} \approx 3,86 \implies 4\text{-esre áll.}$$

Kidolgozott példa közepekre: Számítsuk ki a számtani (A) és mértani (G) közepét az $x = 2\sqrt{3}$ és $y = 8\sqrt{3}$ számoknak!

- **Számtani közép:**

$$A = \frac{2\sqrt{3} + 8\sqrt{3}}{2} = \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$$

- **Mértani közép:**

$$G = \sqrt{2\sqrt{3} \cdot 8\sqrt{3}} = \sqrt{(2 \cdot 8) \cdot (\sqrt{3} \cdot \sqrt{3})} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

Ellenőrzés: Mivel $4\sqrt{3} < 5\sqrt{3}$, jól látható, hogy a mértani közép valóban kisebb lett a számtaninál.

6. Az $x^2 = a$ ($a \in \mathbb{R}$) alakú egyenletek megoldása

Tétel: A tiszta másodfokú egyenlet megoldhatósága

Az $x^2 = a$ típusú egyenletben az ismeretlen (x) a második hatványon szerepel, ezért ezt (tiszt) másodfokú egyenletnek nevezzük. A valós számok körében a megoldások száma és értéke kizárólag az a konstans előjelétől függ:

1. **Ha $a > 0$ (pozitív):** Az egyenletnek pontosan **két különböző valós megoldása** van, amelyek egymás ellentettjei.

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{a} \implies |x| = \sqrt{a} \implies x_1 = \sqrt{a} \text{ és } x_2 = -\sqrt{a}$$

2. **Ha $a = 0$:** Az egyenletnek egyetlen megoldása van, mégpedig a nulla: $x = 0$.

3. **Ha $a < 0$ (negatív):** A valós számok halmazán ($\mathbb{R}$) **nincs megoldás**, mivel bármely valós szám négyzete mindig nemnegatív ($x^2 \geq 0$). Ekkor a megoldáshalmaz üres: $M = \emptyset$.

Kidolgozott mintapéldák egyenletmegoldásra:

$$1. \ x^2 = \frac{25}{9} \implies |x| = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3} \implies x_{1,2} = \pm \frac{5}{3} \implies M = \left\{-\frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right\}$$

$$2. \ \frac{3}{5}x^2 - \frac{15}{4} = 0 \implies \frac{3}{5}x^2 = \frac{15}{4} \quad / \cdot \frac{5}{3} \implies x^2 = \frac{75}{12} = \frac{25}{4} \implies x_{1,2} = \pm \frac{5}{2} = \pm 2,5$$

$$3. \ \frac{x}{12} = \frac{3}{x} \quad (x \neq 0) \implies x \cdot x = 3 \cdot 12 \implies x^2 = 36 \implies |x| = 6 \implies x_{1,2} = \pm 6$$

$$4. \ 5x^2 + 20 = 0 \implies 5x^2 = -20 \implies x^2 = -4 \implies \text{Nincs valós megoldás } (M = \emptyset).$$

$$5. \ \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3} \implies \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right)x^2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \implies \frac{1}{4}x^2 = 1 \implies x^2 = 4 \implies x_{1,2} = \pm 2.$$