

Egyenletek és egyenletrendszerek

7. osztály

1. Az egyenlőségi reláció tulajdonságai a valós számok halmazán, egy egyenlőség átalakítása vele ekvivalens egyenlőséggé

Definíció: Az egyenlőségi reláció alapvető tulajdonságai

A valós számok körében az egyenlőség egy úgynevezett **ekvivalenciareláció**, mivel egyszerre teljesíti a következő három alapvető kritériumot:

1. **Reflexív (önmagára vonatkozó):** Bármely valós szám egyenlő önmagával:

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ esetén } x = x.$$

Példa: $-4\sqrt{2} = -4\sqrt{2}$.

2. **Szimmetrikus (felcserélhető):** Az egyenlőség két oldala szabadon felcserélhető:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \text{ esetén, ha } x = y \implies y = x.$$

Példa: Ha $2\sqrt{2} = \sqrt{8}$, akkor abból kötelezően következik, hogy $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

3. **Tranzitív (közvetítő):** Ha két mennyiség egy harmadikhoz megegyezik, akkor azok egymással is egyenlők:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \text{ esetén, ha } x = y \text{ és } y = z \implies x = z.$$

Példa: Ha $\sqrt{48} = 2\sqrt{12}$ és $2\sqrt{12} = 4\sqrt{3}$, akkor $\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$.

Tétel: Műveletekre vonatkozó egyenértékűség (ekvivalencia)

Egy igaz egyenlőség értéke megmarad (ekvivalens marad), ha az egyenlőség mindkét oldalán ugyanazt a szabályos matematikai lépést hajtjuk végre:

1. **Ugyanazon szám hozzáadása vagy kivonása:** Ha egy egyenlőség mindkét oldalához hozzáadjuk, vagy mindkét oldalából kivonjuk ugyanazt a valós számot, az egyenlőség igaz marad:

$$\text{Ha } x, y, z \in \mathbb{R} \text{ és } x = y \implies \begin{cases} x + z = y + z \\ x - z = y - z \end{cases}$$

2. **Szorzás ugyanazzal a számmal:** Ha az egyenlőség mindkét oldalát megszorozzuk ugyanazzal a valós számmal, igaz egyenlőséget kapunk:

$$\text{Ha } x, y, z \in \mathbb{R} \text{ és } x = y \implies x \cdot z = y \cdot z$$

3. **Osztás nullától különböző számmal:** Ha mindkét oldalt elosztjuk ugyanazzal a nem nulla valós számmal, az egyenlőség igaz marad:

$$\text{Ha } x, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}^* \text{ és } x = y \implies x : z = y : z$$

4. **Egyenlőségek megfelelő oldalainak összeadása vagy kivonása:** Két fennálló egyenlőség bal és jobb oldalait egymással összeadva vagy kivonva igaz egyenlőséget kapunk:

$$\text{Ha } x, y, u, v \in \mathbb{R}, \text{ ahol } x = y \text{ és } u = v \implies \begin{cases} x + u = y + v \\ x - u = y - v \end{cases}$$

5. **Egyenlőségek oldalankénti szorzása vagy osztása:** Két igaz egyenlőség megfelelő oldalait összeszorozva vagy elosztva szintén igaz egyenlőséghez jutunk (osztásnál a nevezők nem lehetnek nullák):

$$\text{Ha } x = y \text{ és } u = v \implies x \cdot u = y \cdot v \quad (\text{illetve } x : u = y : v, \text{ ha } u, v \neq 0)$$

A tulajdonságok gyakorlati alkalmazása (Kidolgozott példák)

Legyenek adottak a következő valós számok: $x = 4\sqrt{5}$, $y = \sqrt{80}$, $u = 3\sqrt{2}$ és $v = \sqrt{18}$.

Előzetes vizsgálat: Mivel a tényezők bevitelével $\sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = 4\sqrt{5}$, illetve $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$, így megállapíthatjuk, hogy $x = y$ és $u = v$.

- a) **Igazoljuk, hogy $x + 3u = y + 3v$!**

Az 1. tulajdonság (illetve a konstanssal való szorzás) értelmében a bal és jobb oldal egyenlő kell legyen:

$$4\sqrt{5} + 3 \cdot 3\sqrt{2} = \sqrt{80} + 3 \cdot 3\sqrt{2} \iff 4\sqrt{5} + 9\sqrt{2} = 4\sqrt{5} + 9\sqrt{2}, \text{ ami nyilvánvalóan igaz.}$$

- b) **Igazoljuk, hogy $x \cdot 4u = y \cdot 4v$!**

A 2. tulajdonságot alkalmazva:

$$4\sqrt{5} \cdot 4(3\sqrt{2}) = \sqrt{80} \cdot 12\sqrt{2} \iff 48\sqrt{10} = 4\sqrt{5} \cdot 12\sqrt{2} \iff 48\sqrt{10} = 48\sqrt{10}, \text{ igaz.}$$

- **c) Igazoljuk, hogy $3x + 2u = 3y + 2v$!**

A 2. és a 4. tulajdonság együttes használatával oldalanként szorzunk, majd összeadjuk az egyenlőségeket:

$$\begin{cases} x = y & \cdot 3 \\ u = v & \cdot 2 \end{cases} \begin{matrix} \rightarrow \\ \rightarrow \end{matrix} \begin{cases} 3x = 3y \\ 2u = 2v \end{cases} \implies 3x + 2u = 3y + 2v \iff 12\sqrt{5} + 6\sqrt{2} = 12\sqrt{5} + 6\sqrt{2}, \text{ igaz.}$$

Ismeretlen meghatározása ekvivalens átalakításokkal

Amikor egy egyenlőségben ismeretlen változó (pl. x) szerepel, a fent ismertetett mérlegelv-szerű átalakításokat végezzük addig, amíg az ismeretlent magában nem kapjuk az egyik oldalon.

1. **példa:** Oldjuk meg az $x + 2\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$ egyenletet!

Vonjunk ki mindkét oldalból $2\sqrt{3}$ -at (1. tulajdonság):

$$x + 2\sqrt{3} = 9\sqrt{3} \quad / - 2\sqrt{3} \implies x = 7\sqrt{3}.$$

2. **példa:** Határozzuk meg x értékét: $4x + 15 = 9x - 20$!

Végezzünk ekvivalens mérlegátalakításokat lépésről lépésre:

$$\begin{aligned} 4x + 15 &= 9x - 20 & / - 9x \\ -5x + 15 &= -20 & / - 15 \\ -5x &= -35 & / : (-5) \\ x &= 7. \end{aligned}$$

3. **példa:** Oldjuk meg a $3 \cdot [7 - (2x - 5)] = 18$ egyenletet!

Első lépésben osszuk el mindkét oldalt 3-mal (3. tulajdonság), majd bontsuk fel a belső zárójelet:

$$\begin{aligned} 3 \cdot [7 - (2x - 5)] &= 18 & / : 3 \\ 7 - (2x - 5) &= 6 & \text{(előjelváltás a zárójelnél)} \\ 7 - 2x + 5 &= 6 & \text{(összevonás)} \\ 12 - 2x &= 6 & / - 12 \\ -2x &= -6 & / : (-2) \\ x &= 3. \end{aligned}$$

2. Az $ax + b = 0$ alakú egyenlet ($a, b \in \mathbb{R}$ adottak, $x \in \mathbb{R}$)

Definíció: Elsőfokú egyismeretlenes egyenlet alapfogalmai

Az $ax + b = 0$ alakú kifejezés egy olyan egyváltozós nyílt mondat, amelyben egyenlőségjel szerepel. Az a és b adott valós állandók (konstansok), x pedig a keresett ismeretlen.

- **Értelmezési tartomány (D):** A valós számoknak azon halmaza ($D \subseteq \mathbb{R}$), ahonnan az ismeretlen (x) az értékeit felveheti ($x \in D$).
- **Lineáris egyenlet:** Az ilyen típusú összefüggéseket *elsőfokú egyismeretlenes egyenletnek* vagy más néven *lineáris egyenletnek* nevezzük, mivel a változó kizárólag az első hatványon szerepel benne.

Példák lineáris egyenletekre:

$$-4\sqrt{3}x + 24 = 0 \quad (x \in \mathbb{R}); \quad \frac{7\sqrt{2}}{3}x - 0, (5) = 0 \quad (D = \mathbb{R}).$$

Definíció: Megoldáshalmaz és egyenértékűség

- **Egyenlet megoldása:** Egy egyenlet megoldása során az értelmezési tartomány azon konkrét elemeit keressük, amelyeket az ismeretlen helyére behelyettesítve számszerűen igaz egyenlőségre jutunk. Ezen értékek összessége alkotja az egyenlet **megoldáshalmazát** (M).
- **Ekvivalens (egyenértékű) egyenletek:** Két egyenletet akkor nevezünk egyenértékűnek, ha az értelmezési tartományukon vizsgált megoldáshalmazuk hajszálpontosan megegyezik.

Példa egyenértékűsége: A $-2\sqrt{7}x + 14 = 0 \implies M = \{\sqrt{7}\}$ és az $x - \sqrt{7} = 0 \implies M = \{\sqrt{7}\}$ egyenletek ekvivalensek, mivel a megoldáshalmazuk azonos.

Tétel: Az egyenletmegoldás ekvivalens átalakításai és általános megoldása

Az egyenleteket az egyenlőségi reláció tulajdonságaira épülő mérlegátalakításokkal oldjuk meg:

1. **Ugyanazon tag hozzáadása vagy kivonása:** Ha egy egyenlet mindkét oldalához hozzáadjuk vagy kivonjuk ugyanazt a valós számot (vagy kifejezést), az eredetivel ekvivalens egyenletet kapunk.
Gyakorlati szabály (Mérlegelv): Egy tagot úgy mozgathatunk át az egyenlet egyik oldaláról a másikra, hogy közben megváltoztatjuk az előjelét (ellentettjére váltjuk).
2. **Szorítás vagy osztás nem nulla számmal:** Ha az egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk vagy elosztjuk ugyanazzal a 0-tól különböző valós számmal, az egyenértékűség megmarad.

Az $ax + b = 0$ általános eset megoldási levezetése ($a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$):

$$ax + b = 0 \quad \bigg/ -b \iff ax = -b \quad \bigg/ :a \iff x = -\frac{b}{a} \implies M = \left\{ -\frac{b}{a} \right\}.$$

Gyakorló feladatok és kidolgozott megoldások

1. **Feladat:** Oldjuk meg a $-4\sqrt{3}x + 24 = 0$ egyenletet, ha a feltétel $x \in \mathbb{R}$ és $x \geq 3$!

Megoldás lépései:

$$\begin{aligned} -4\sqrt{3}x + 24 &= 0 & / -24 \\ -4\sqrt{3}x &= -24 & / : (-4\sqrt{3}) \\ x &= \frac{-24}{-4\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Feltétel ellenőrzése: Teljesül-e, hogy a kapott gyök $x \geq 3$?

Vigyünk be a tényezőt a gyökjel alá: $2\sqrt{3} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{12}$. Mivel a $3 = \sqrt{9}$ és $\sqrt{12} > \sqrt{9}$, ezért a feltétel teljesül! A megoldáshalmaz: $M = \{2\sqrt{3}\}$.

2. **Feladat:** Oldjuk meg a törtes egyenletet a valós számok halmazán:

$$\frac{4x-1}{3} + \frac{2x-1}{2} = 3x-1 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Megoldás lépései: Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát a közös nevezővel (6-tal), hogy eltűnjenek a törtek!

$$\begin{aligned} \frac{4x-1}{3} + \frac{2x-1}{2} &= 3x-1 & / \cdot 6 \\ 2(4x-1) + 3(2x-1) &= 6(3x-1) & \text{(Zárójelek felbontása)} \\ 8x-2+6x-3 &= 18x-6 & \text{(Összevonás azonos oldalon)} \\ 14x-5 &= 18x-6 & / -14x \\ -5 &= 4x-6 & / +6 \\ 1 &= 4x & / :4 \\ x &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Végig ekvivalens átalakításokat végeztünk, így a megoldáshalmaz: $M = \{\frac{1}{4}\}$.

3. **Feladat (Abszolútértékes egyenlet):** Oldjuk meg a $|3x - \sqrt{3}| = 4\sqrt{3}$ egyenletet, ha az alaphalmaz a pozitív valós számok halmaza ($x \in \mathbb{R}_+$)!

Megoldás: Az abszolút érték definíciója miatt két esetet kell megvizsgálnunk:

- **I. eset (A moduluson belüli kifejezés pozitív):**

$$3x - \sqrt{3} = 4\sqrt{3} \iff 3x = 5\sqrt{3} \iff x = \frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

Mivel $\frac{5\sqrt{3}}{3} > 0$, ez az érték beleesik az $\mathbb{R}_+$ alaphalmazba, tehát érvényes megoldás.

- **II. eset (A moduluson belüli kifejezés negatív):**

$$3x - \sqrt{3} = -4\sqrt{3} \iff 3x = -3\sqrt{3} \iff x = -\sqrt{3}.$$

Mivel a $-\sqrt{3}$ egy negatív szám ($-\sqrt{3} \notin \mathbb{R}_+$), ez az érték nem felel meg a kezdeti feltételnek!

Így az egyenletnek az adott alaphalmazon csak egyetlen megoldása van: $M = \left\{ \frac{5\sqrt{3}}{3} \right\}$.

4. **Feladat (Ellentmondásra vezető egyenlet):** Oldjuk meg a $\frac{5-x}{3} = -\frac{x}{3}$ egyenletet a valós számok körében!

Megoldás: Szorozzunk mindkét oldalt 3-mal:

$$\frac{5-x}{3} = -\frac{x}{3} \quad / \cdot 3 \iff 5-x = -x \quad / + x \iff 5 = 0 \cdot x \implies 5 = 0.$$

Következtetés: Az egyenletnek **nincs megoldása**, mivel nem létezik olyan valós szám, amelyet 0-val megszorozva 5-öt kapnánk. A megoldáshalmaz üres: $M = \emptyset$.

5. **Feladat (Azonosság):** Oldjuk meg az $\frac{2x-4}{2} = \frac{3x-6}{3}$ egyenletet ($x \in \mathbb{R}$)!

Megoldás: Végezzük el az egyszerűsítéseket vagy szorozzunk 6-tal:

$$x-2 = x-2 \quad / -x \iff -2 = -2 \iff 0 \cdot x = 0.$$

Következtetés: Mivel a $0 = 0$ egyenlőség bármely x valós szám esetén igaz (bármit szorozunk nullával, nullát kapunk), ezért az egyenlet megoldáshalmaza a teljes valós számhalmaz: $M = \mathbb{R}$. Az ilyen összefüggést **azonosságnak** nevezzük.

3. Két lineáris egyenletből álló, kétismeretlenes egyenletrendszerek

Definíció: Kétismeretlenes lineáris egyenletrendszer és megoldása

Ha ugyanazon két változót (ismeretlent) tartalmazó két elsőfokú (lineáris) egyenletet együttesen vizsgálunk, akkor **kétismeretlenes lineáris egyenletrendszerről** beszélünk.

Emlékeztető: Egy egyenletet akkor nevezünk lineárisnak, ha a benne szereplő változók legfeljebb az első hatványon szerepelnek.

Az egyenletrendszer általános alakja:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \quad \text{ahol } a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R} \text{ adott állandók, } x, y \in \mathbb{R} \text{ az ismeretlenek.}$$

A megoldás fogalma: Önmagában egy kétismeretlenes lineáris egyenletnek végtelen sok számpár a megoldása (minden egyes x -hez pontosan egy y tartozik). Az *egyenletrendszer megoldása* az a konkrét $(x; y)$ rendezett számpár, amely **mindkét egyenletet egyszerre** igazzá teszi (a két halmaz közös eleme).

Példa a behelyettesítésre: Vizsgáljuk meg a $\begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ 2x - y - 4 = 0 \end{cases}$ egyenletrendszert! Ennek a közös megoldása az $x = 3$ és $y = 2$ érték, azaz a $(3; 2)$ számpár, mivel mindkét egyenletbe behelyettesítve $(3 + 2 - 5 = 0$ és $2 \cdot 3 - 2 - 4 = 0)$ igaz egyenlőséget kapunk.

Az egyenletrendszerek megoldási módszerei

Tétel / Eljárás: I. Az egyenlő együtthatók módszere

ennek a módszernek az a lényege, hogy a két egyenletet olyan alkalmas valós számokkal szorozzuk meg (bővítjük), hogy az egyik kiválasztott ismeretlen együtthatója a két egyenletben **egymás ellentettjévé** váljon.

Az algoritmus lépései:

1. Rendezzük az egyenletrendszert úgy, hogy az azonos ismeretlenek egymás alá kerüljenek, a szabadtagok (konstansok) pedig a jobb oldalra.
2. Szorozzuk meg az egyik vagy mindkét egyenletet úgy, hogy az egyik változó együtthatói egymás ellentettjei legyenek.
3. Adjuk össze a két egyenlet bal és jobb oldalát! Ekkor az adott ismeretlen kiesik, és egy egyismeretlenes lineáris egyenletet kapunk.
4. Oldjuk meg az egyismeretlenes egyenletet!
5. A kapott értéket helyettesítsük vissza bármelyik eredeti egyenletbe, és számítsuk ki a másik változó értékét is.

Megjegyzés: A gyakorlatban legtöbbször ezt a hatékony eljárást alkalmazzuk.

Kidolgozott mintapélda az egyenlő együtthatók módszerére:

Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számpárok halmazán:

$$\begin{cases} 4x + 3y - 17 = 0 \\ -3y + 5x - 10 = 0 \end{cases}$$

1. Rendezzük az egyenleteket (oszloposan egymás alá):

$$\begin{cases} 4x + 3y = 17 \\ 5x - 3y = 10 \end{cases}$$

2. Mivel az y együtthatói $(+3$ és $-3)$ már eleve egymás ellentettjei, nem kell szoroznunk, azonnal összeadjuk a megfelelő oldalakat:

$$\begin{aligned} (4x + 5x) + (3y - 3y) &= 17 + 10 \\ 9x &= 27 & / : 9 \\ x &= 3. \end{aligned}$$

3. A megkaptuk az egyik ismeretlent ($x = 3$). Helyettesítsük ezt vissza az első rendezett egyenletbe:

$$4 \cdot 3 + 3y = 17 \iff 12 + 3y = 17 \quad / - 12 \iff 3y = 5 \quad / : 3 \iff y = \frac{5}{3}.$$

Az egyenletrendszer megoldása tehát: $M = \left\{ \left(3; \frac{5}{3} \right) \right\}$.

Tétel / Eljárás: II. A behelyettesítés módszere

A behelyettesítéssel eljárás lényege, hogy az egyik egyenletből **kifejezzük az egyik változót** a másik segítségével, majd ezt a kifejezést **behelyettesítjük a másik egyenletbe**. Ezzel szintén egy egyismeretlenes egyenlethez jutunk.

Gyakorlati tanács: Ezt a módszert leginkább akkor érdemes választani, ha valamelyik ismeretlen együtthatója az egyik egyenletben 1 vagy -1 , mert ekkor törtkifejezések nélkül tudunk számolni.

Kidolgozott mintapélda a behelyettesítés módszerére:

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ 3x + 2y - 15 = 0 \end{cases}$$

1. Rendezzük a rendszert, majd az első egyenletből fejezzük ki az y ismeretlent (mivel az együtthatója -1):

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \implies y = 2x - 3 \\ 3x + 2y = 15 \end{cases}$$

2. Helyettesítsük be a második egyenletbe az y helyére a $(2x - 3)$ kifejezést:

$$3x + 2(2x - 3) = 15 \quad (\text{Zárójel felbontása})$$

$$3x + 4x - 6 = 15 \quad (\text{Összevonás})$$

$$7x - 6 = 15 \quad / + 6$$

$$7x = 21 \quad / : 7$$

$$x = 3.$$

3. A kapott $x = 3$ értéket visszahelyettesítjük a kifejezett y -ba:

$$y = 2 \cdot 3 - 3 \implies y = 3.$$

A megoldáshalmaz: $M = \{(3; 3)\}$.

Gyakorló feladat (Összetett törtes egyenletrendszer)

Feladat: Oldjuk meg a valós számpárok körében a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} \frac{3x-1}{4} - \frac{2y-3}{3} = 2 \\ \frac{x+2}{3} - \frac{y-1}{2} = 1 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Megoldás lépései:

1. Szüntessük meg a törteket: Az 1. egyenletet szorozzuk a közös nevezővel (12-vel), a 2. egyenletet pedig 6-tal:

$$\begin{cases} 3(3x-1) - 4(2y-3) = 24 \\ 2(x+2) - 3(y-1) = 6 \end{cases}$$

2. Bontsuk fel a zárójeleket és vonjuk össze az azonos oldalakat (Rendezés):

$$\begin{cases} 9x - 3 - 8y + 12 = 24 \implies 9x - 8y + 9 = 24 \implies 9x - 8y = 15 \\ 2x + 4 - 3y + 3 = 6 \implies 2x - 3y + 7 = 6 \implies 2x - 3y = -1 \end{cases}$$

3. Alkalmazzuk az egyenlő együtthatók módszerét az x kiejtésére!

Szorozzuk meg az 1. egyenletet 2-vel, a 2. egyenletet pedig (-9) -cel:

$$\begin{cases} 18x - 16y = 30 \\ -18x + 27y = 9 \end{cases}$$

4. Adjuk össze a két egyenlet bal és jobb oldalát:

$$\begin{aligned} (-16y) + 27y &= 30 + 9 \\ 11y &= 39 \quad \quad \quad / : 11 \\ y &= \frac{39}{11}. \end{aligned}$$

5. Helyettesítsük vissza az y értékét a $2x - 3y = -1$ egyenletbe, és számítsuk ki x -et:

$$2x - 3 \cdot \frac{39}{11} = -1 \iff 2x - \frac{117}{11} = -1 \quad / + \frac{117}{11} \iff 2x = \frac{106}{11} \quad / : 2 \iff x = \frac{53}{11}.$$

Az egyenletrendszer egyetlen megoldása a rendezett számpár: $M = \left\{ \left(\frac{53}{11}, \frac{39}{11} \right) \right\}$.

4. Egyenletek és egyenletrendszerek segítségével megoldható szöveges feladatok

Tétel / Módszer: A szöveges feladatok megoldásának általános algoritmus

A gyakorlati, szöveges formában feltett problémák sikeres matematikai megoldásához az alábbi öt pontból álló, rendszerezett lépéssorozatot érdemes követni:

1. **A feladat alapos megértése:** A szöveg többszöri elolvasása, a megadott adatok, az ismert és ismeretlen mennyiségek közötti összefüggések letisztázása.
2. **Az ismeretlen változó(k) megválasztása:** A keresett mennyiségeket változókkal (pl. x, y) jelöljük, és megállapítjuk azok értelmezési tartományát (pl. csak pozitív egész számok lehetnek).
3. **A matematikai modell (egyenlet vagy egyenletrendszer) felírása:** A szövegben megfogalmazott feltételeket és kapcsolatokat egyenletek formájára fordítjuk le.
4. **Az egyenlet vagy egyenletrendszer megoldása:** A korábban tanult ekvivalens algebrai módszerrel (mérlegelv, behelyettesítés, egyenlő együtthatók módszere) kiszámítjuk a változók értékét.
5. **A kapott eredmények értelmezése és ellenőrzése:** A kiszámított gyököket visszahelyettesítjük az *eredeti szövegbe* (szöveges próba), megvizsgáljuk, hogy megfelelnek-e a valóságos feltételeknek, majd egyértelmű, szöveges választ fogalmazunk meg.

Kidolgozott gyakorlati mintapéldák

1. Gyakorló feladat (Szakaszos útmegtétel):

Egy diákcsoport többnapos gyalogtúrára indult. Az első napon megtették a teljes tervezett távolság $\frac{1}{4}$ részét. A második napon a túra megmaradt részének a $\frac{3}{5}$ részét haladták le, míg a harmadik, utolsó napra pontosan 36 km gyaloglás maradt.

- Mekkora volt a túra teljes hossza?
- Hány kilométert gyalogoltak az első, illetve a második napon?

Megoldás és levezetés:

a) Legyen x a teljes túravonal hossza kilométerben megadva.

- Az első napon megtett távolság: $\frac{1}{4}x$. Ekkor hátramaradt az út $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ része, azaz $\frac{3}{4}x$.
- A második napon a maradék $\frac{3}{5}$ -ét teljesítették: $\frac{3}{5} \cdot \left(\frac{3}{4}x\right) = \frac{9}{20}x$.
- A harmadik napon megtett távolság ismert: 36 km.

A három nap alatt teljesített szakaszok összege kiadja a teljes x távolságot. Írjuk fel az egyenletet:

$$\frac{1}{4}x + \frac{9}{20}x + 36 = x \quad \bigg/ \cdot 20 \iff 5x + 9x + 720 = 20x \iff 14x + 720 = 20x \quad \bigg/ -14x \iff 6x = 720$$

Szöveges felelet a): A két végpont közötti teljes túravonal hossza 120 km volt.

b) Számítsuk ki a napi teljesítményeket az $x = 120$ visszahelyettesítésével:

- Első nap: $120 \cdot \frac{1}{4} = 30$ km.
- Második nap: $120 \cdot \frac{9}{20} = 54$ km *(Ellenőrzés: $30 + 54 + 36 = 120$ km, a próba helyes).*

Szöveges felelet b): A túrázók az első napon 30 km-t, a második napon pedig 54 km-t tettek meg.

2. Gyakorló feladat (Mennyiségek és arányok változása):

Két nagy méretű gyümölcslé-tartály közül az elsőben 800 liter, a másodikban 1200 liter almalé volt. A nagyobbik tartályból négyszer annyi gyümölcslevet engedtek le palackozásra, mint a kisebbikből, aminek következtében a két tartályban hajszálpontosan ugyanannyi folyadék maradt. Hány liter almalevet engedtek le külön-külön a két tartályból?

Megoldás és levezetés:

Legyen x az első (kisebb) tartályból leengedett almalé mennyisége literben. Ekkor a szöveg feltétele alapján a második (nagyobb) tartályból leengedett mennyiség $4x$ liter.

Írjuk fel az egyenlőséget a tartályokban maradt folyadékok mennyiségére:

$$800 - x = 1200 - 4x \quad \bigg/ +4x \iff 800 + 3x = 1200 \quad \bigg/ -800 \iff 3x = 400 \iff x = \frac{400}{3} = 133\frac{1}{3}$$

Számítsuk ki a második tartályból leeresztett folyadékot is:

$$4x = 4 \cdot \frac{400}{3} = \frac{1600}{3} = 533\frac{1}{3} \text{ liter.}$$

Szöveges felelet: Az első tartályból $133\frac{1}{3}$ liter, a másodikból pedig $533\frac{1}{3}$ liter gyümölcslevet engedtek le.

3. Gyakorló feladat (Kétismeretlenes egyenletrendszer – összetett számosságok):

Egy vidéki szállodában kizárólag kétágyas és négyágyas szobák találhatók, összesen 25 darab szoba. Amikor a szálloda teltházzal üzemel, pontosan 74 vendég tud kényelmesen megszállni. Hány kétágyas és hány négyágyas szoba van a szállodában?

Megoldás és levezetés:

Vezessünk be két ismeretlent: legyen x a kétágyas szobák száma, y pedig a négyágyas szobák száma! A megadott feltételek alapján írjuk fel az egyenletrendszert:

$$\begin{cases} x + y = 25 \\ \text{(Az első egyenlet a szobák összesített számára vonatkozik)} \\ 2x + 4y = 74 \\ \text{(A második egyenlet a férőhelyek/ágyak számára vonatkozik)} \end{cases}$$

Alkalmazzuk az egyenlő együtthatók módszerét: szorozzuk meg az első egyenletet (-2) -vel, hogy az x változó kiessen!

$$\begin{cases} -2x - 2y = -50 \\ 2x + 4y = 74 \end{cases}$$

Adjuk össze a két egyenlet megfelelő oldalait:

$$\begin{array}{rcl} (-2y) + 4y & = & (-50) + 74 \\ 2y & = & 24 \quad \quad \quad / : 2 \\ y & = & 12. \end{array}$$

Helyettesítsük vissza az $y = 12$ értéket az $x + y = 25$ egyenletbe:

$$x + 12 = 25 \implies x = 13.$$

Ellenőrzés: A szobák száma: $13 + 12 = 25$ darab. Az ágyak száma: $13 \cdot 2 + 12 \cdot 4 = 26 + 48 = 74$ férőhely. A próba tökéletes.

Szöveges felelet: A szállodában 13 darab kétágyas és 12 darab négyágyas szoba található.

4. Gyakorló feladat (Elosztási / csoportosítási feladat):

Egy iskolai kiránduláson csónakázni viszik a tanulókat. Ha minden csónakba 4 diák ülne be, akkor 5 tanulónak már nem jutna hely a csónakokban. Ha viszont minden csónakba 5 diák ülne be, akkor pontosan 2 csónak teljesen üresen maradna. Hány csónak áll rendelkezésre, és hány tanuló vesz részt a kiránduláson?

Megoldás és levezetés:

Legyen c a csónakok száma, t pedig a résztvevő tanulók száma! Írjuk fel a tanulók számát két különböző módon:

$$\begin{cases} t = 4c + 5 \\ \text{(Ha 4-esével ülnek, 5 diák kimarad)} \\ t = 5 \cdot (c - 2) \\ \text{(Ha 5-ösével ülnek, 2 csónakkal kevesebbre van szükség)} \end{cases}$$

Mivel mindkét egyenlet bal oldala a tanulók összesített száma (t), a jobb oldalaknak egyenlőnek kell lenniük. Írjuk fel az egyenletet:

$$4c + 5 = 5(c - 2) \quad (\text{Zárójel felbontása})$$

$$4c + 5 = 5c - 10 \quad / - 4c$$

$$5 = c - 10 \quad / + 10$$

$$c = 15.$$

Számítsuk ki a diákok számát az első egyenletből:

$$t = 4 \cdot 15 + 5 = 60 + 5 = 65.$$

Ellenőrzés a második egyenlettel: Ha 65 diák 5-ösével ül be, akkor $\frac{65}{5} = 13$ csónakba férnek el, ami valóban pontosan 2-vel kevesebb az összesen rendelkezésre álló 15 csónaknál.

Szöveges felelet: A kiránduláson összesen 15 csónak áll rendelkezésre és 65 tanuló vesz részt.