

Az adatszerzés elemei

7. osztály

1. Két nemüres halmaz Descartes-szorzata

A halmazok vizsgálata során gyakran van szükség arra, hogy két különböző halmaz elemeit párosítsuk egymással.

Legyen adott két halmaz: $X = \{5; 8\}$ és $Y = \{7; 9; 11\}$. Képezzünk ezen két halmaz elemeiből úgynevezett *számpárokat* oly módon, hogy a pár első eleme szigorúan az X halmazból, a második eleme pedig az Y halmazból származzon! Az összes lehetséges párosítás a következő:

$$(5; 7), (5; 9), (5; 11), (8; 7), (8; 9), (8; 11).$$

Ezeket az alakzatokat **rendezett pároknak** nevezzük. A "rendezett" szó arra utal, hogy a sorrend rendkívül fontos: egy $(5; 7)$ számpár nem ugyanazt jelenti, mint egy $(7; 5)$ számpár, azaz $(5; 7) \neq (7; 5)$.

Definíció: A Descartes-szorzat fogalma

Két halmaz (például A és B) **Descartes-szorzatán** (ejtsd: Dékárt-szorzatán) azt az új halmazt értjük, amely az összes olyan lehetséges rendezett párból áll, amelynek első eleme az A halmazhoz, második eleme pedig a B halmazhoz tartozik.

Jelölése: $A \times B$ (olvasva: A kereszt B).

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ és } y \in B\}$$

A fenti bevezető példánk alapján az X és Y halmazok Descartes-szorzata:

$$X \times Y = \{(5; 7), (5; 9), (5; 11), (8; 7), (8; 9), (8; 11)\}.$$

Fontos megjegyzés a sorrendiségről: Ha megfordítjuk a szorzást ($Y \times X$), akkor az első elemet az Y -ből, a másodikat az X -ből kell vennünk:

$$Y \times X = \{(7; 5), (7; 8), (9; 5), (9; 8), (11; 5), (11; 8)\}.$$

Látható, hogy az elemek nem egyeznek meg, tehát a Descartes-szorzatra általánosan igaz, hogy **nem felcserélhető (nem kommutatív)**: $X \times Y \neq Y \times X$.

Szabály: A Descartes-szorzat számossága (kardinalisa)

Egy véges halmaz számossága (kardinalisa) a benne lévő elemek darabszámát jelenti (jelölése: $\text{card } A$ vagy $|A|$).

Két halmaz Descartes-szorzatának elemszámát (a létrejövő párok számát) úgy kapjuk meg, hogy az eredeti halmazok elemszámát összeszorozzuk:

$$\text{card}(A \times B) = \text{card}(A) \cdot \text{card}(B)$$

A bevezető példában: az X halmaznak 2 eleme van, az Y -nak 3 eleme. A párok száma tehát: $\text{card}(X \times Y) = 2 \cdot 3 = 6$.

Kreatív gyakorlati alkalmazások

1. Alkalmazás egy 2D-s hálózaton (A Torpedó játék):

A klasszikus Torpedó (Battleship) társasjáték pályája tökéletes példája a Descartes-szorzatnak. A pálya oszlopait betűkkel, sorait számokkal jelölik.

- Legyen $O = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J\}$ az oszlopok halmaza (10 elem).
- Legyen $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ a sorok halmaza (10 elem).

A teljes játéktábla minden egyes mezője egy egyedi rendezett párral írható le, ami az $O \times S$ Descartes-szorzat eleme. A tábla összes mezőjének száma: $\text{card}(O \times S) = 10 \cdot 10 = 100$ darab mező.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2		Hajó	Hajó	Hajó						
3										
4										
5			C;5							
6										
7										
8										
9										
10										

Amikor a játékos bemond egy koordinátát, például a pirossal jelölt $(C; 5)$ -öt, az egy konkrét mezőt azonosít (a "C" oszlop "5." sora). Egy hajó helyzetét például a kékkel jelölt $(B; 2), (C; 2), (D; 2)$ rendezett párok sorozatával adhatjuk meg.

2. Alkalmazás véletlenszerű sorsolásoknál (Golyók húzása):

Képzeljünk el egy urnát, amelyben 1-től 5-ig számozott golyók vannak. Húzzunk egy golyót, felírjuk a számát, visszatesszük az urnába, majd húzzunk egy másodikat is.

- Az első húzás lehetséges eredményei: $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- A második húzás lehetséges eredményei: $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

A húzás eredménye egy $(e; m)$ rendezett számpár, ahol az első szám az első húzást, a második a második húzást jelenti. A lehetséges összes húzáskombináció az $E \times M$ Descartes-szorzat elemeinek felel meg.

Itt is rendkívül fontos a sorrend: ha az elsőre 2-est, másodikkra 5-öst húzzunk, az a $(2; 5)$ számpár. Ez teljesen más esemény, mintha elsőre húztuk volna az 5-öst és másodikkra a 2-est, vagyis az $(5; 2)$ párt!

Az összes lehetséges húzáspár száma: $\text{card}(E \times M) = 5 \cdot 5 = 25$.

2. A derékszögű koordináta-rendszer

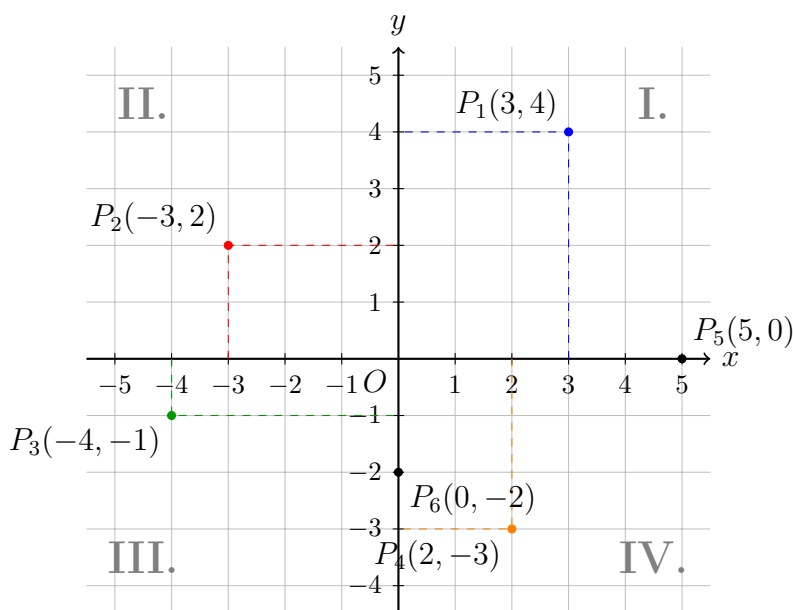
Definíció: A derékszögű koordináta-rendszer felépítése

A síkban vegyünk fel két, egymásra merőleges számegyenest, amelyek a 0 ponthoz tartozó értéknél metszik egymást. Ezt a metszéspontot **origónak** nevezzük (jelölése: O).

- A vízszintes számegyenest x -tengelynek vagy **abszcisszatengelynek** nevezzük.
- A függőleges számegyenest y -tengelynek vagy **ordinátatengelynek** hívjuk.

A két tengely a síkot négy végtelen tartományra, úgynevezett **síknegyedekre** (I., II., III. és IV. negyed) osztja. A sík bármely pontjának helyzetét egy egyedi $(x; y)$ rendezett számpárral tudjuk megadni, ahol az első szám (x) a pont abszcisszája, a második szám (y) pedig a pont ordinátája.

Pontok ábrázolása a síkban: Ábrázoljunk néhány egyedi pontot a koordináta-rendszerben! Legyen $P_1(3, 4)$, $P_2(-3, 2)$, $P_3(-4, -1)$ és $P_4(2, -3)$. Ha egy pont valamelyik koordinátája nulla, akkor a pont az egyik tengelyen helyezkedik el. Például a $P_5(5, 0)$ az x -tengelyen, a $P_6(0, -2)$ pedig az y -tengelyen fekszik.



Mivel a számegyeneseken a valós számok halmaza ($\mathbb{R}$) van reprezentálva, ezért az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ Descartes-szorzat minden egyes elemének (irracionális számoknak is) megfelel egy pont a síkban. Például tökéletesen ábrázolható a $K(-\sqrt{2}, \sqrt{7})$ pont is, ha a tengelyeken kimérjük ezeket a valós értékeket.

Geometriai számítások a koordináta-rendszerben

Tétel / Szabály: Szakasz hossza és felezőpontja

A derékszögű koordináta-rendszer kiválóan alkalmas geometriai problémák algebrai megoldására.

1. **Két pont távolsága (Szakasz hossza):** Ha adott két pont a síkban, a rajtuk keresztülhúzott vízszintes és függőleges segédvonalakkal egy derékszögű háromszöget hozhatunk létre. A szakasz hossza e háromszög átfogója, amely a *Pitagorasz-tétellel* könnyedén kiszámítható.
2. **Szakasz felezőpontja:** Egy szakasz felezőpontjának koordinátáit úgy kapjuk meg, hogy a végpontok megfelelő koordinátáinak (az x -eket külön és az y -okat külön) kiszámítjuk a *számtani közepét* (átlagát).

Gyakorló feladat: Adott két pont a koordináta-rendszerben: $P(1, 2)$ és $Q(9, 8)$. Legyen M a PQ szakasz felezőpontja.

- a) Számítsuk ki a PQ szakasz hosszát!
- b) Határozzuk meg az M felezőpont koordinátáit!

Megoldás és levezetés:

a) **Szakasz hossza:** Hozzunk létre egy derékszögű háromszöget úgy, hogy kiegészítsük a szakaszt egy $R(9, 2)$ derékszögű csúccsal.

- A vízszintes befogó hossza (PR): $9 - 1 = 8$ egység.
- A függőleges befogó hossza (QR): $8 - 2 = 6$ egység.

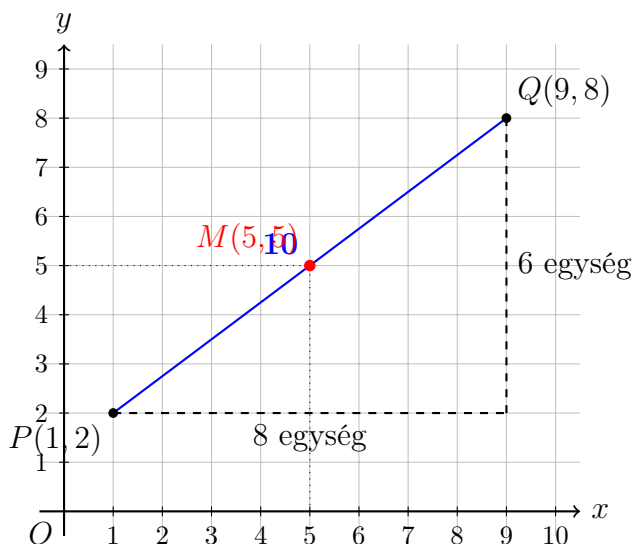
Pitagorasz tételét felírva az átfogóra (PQ):

$$PQ^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100 \implies PQ = \sqrt{100} = 10 \text{ egység.}$$

b) **Felezőpont koordinátái:** A végpontok abszcisszáinak és ordinátáinak átlagát vesszük:

$$x_M = \frac{1 + 9}{2} = \frac{10}{2} = 5 \quad \text{és} \quad y_M = \frac{2 + 8}{2} = \frac{10}{2} = 5.$$

Tehát a felezőpont koordinátái: $M(5, 5)$.



3. Táblázatok, grafikonok, diagramok és gyakorisági sokszögek

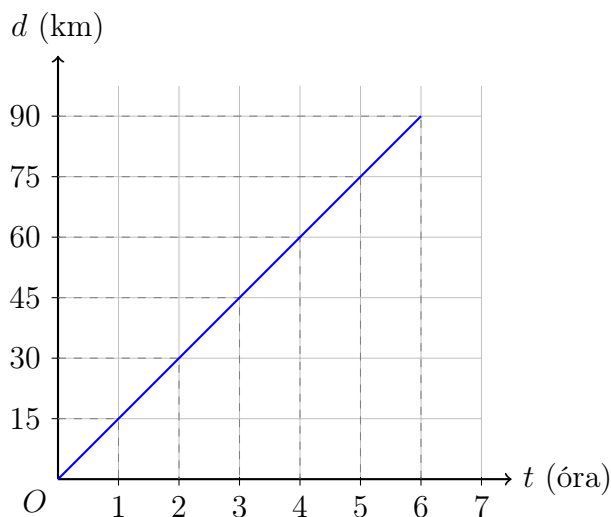
A mindennapi életben és a tudományokban is rengeteg adat vesz minket körül. Ezeknek az adatoknak a feldolgozása, rendszerezése és áttekinthető szemléltetése táblázatok, diagramok és grafikonok segítségével történik.

Táblázatok és vonaldiagramok (Grafikonok)

A táblázatokat jellemzően arra használjuk, hogy rögzítsük bennük valamilyen logikától függő vagy véletlenszerű adatok sorozatát (pl. vonatmenetrend, órarend). Ha az adatok matematikailag függenek egymástól, grafikonon (vonaldiagramon) is ábrázolhatjuk őket.

1. Gyakorlati példa (Út-idő grafikon): Egy kerékpáros állandó, 15 km/h sebességgel halad. Foglaljuk táblázatba, hogy óránként mekkora távolságot tesz meg, majd ábrázoljuk! Az egyenes vonalú egyenletes mozgás képlete: $d = v \cdot t$, ahol d a megtett út, v a sebesség, t pedig az eltelt idő. Esetünkben: $d = 15 \cdot t$.

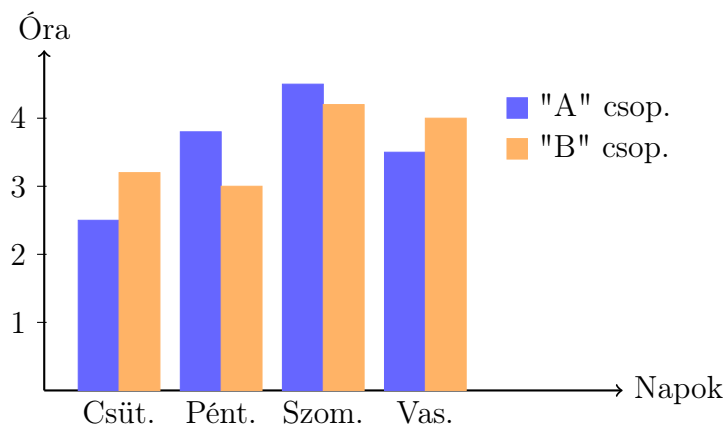
Idő t (óra)	1	2	3	4	5	6
Távolság d (km)	15	30	45	60	75	90



Oszlop- és kördiagramok

Bizonyos felmérések vagy statisztikai adatok szemléltetésére a vonalak helyett sokkal kifejezőbbek az oszlopok vagy a körcikkek.

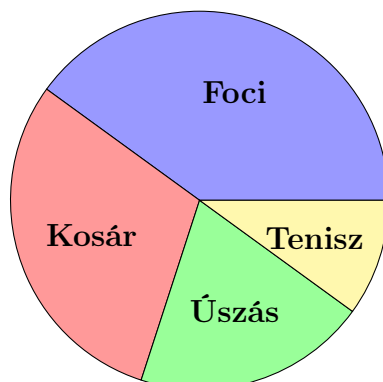
2. Gyakorlati példa (Oszlopdiagram): Egy felmérés során összehasonlították két baráti társaság (az "A" és a "B" csoport) átlagos napi képernyőidejét (órában) a hétvégéhez közeledve. Az eredményeket oszlopdiagramon ábrázolták. Ebből könnyen leolvasható, hogy melyik napon ki használta többet a telefonját.



3. Gyakorlati példa (Kördiagram és szögszámítás): Egy 40 fős sportklubban megkérdezték a tagokat, hogy mi a kedvenc sportáguk. Az eredmények: 16 fő a focit, 12 fő a kosárlabdát, 8 fő az úszást, 4 fő pedig a teniszt választotta. Szemléltessük ezt egy kördiagramon!

Kiszámítás: A 40 tanuló a teljes, 360° -os körnek felel meg. Így egyetlen tanulóra $360^\circ : 40 = 9^\circ$ -os körcikkek jut.

- Foci: $16 \cdot 9^\circ = 144^\circ$
- Kosárlabda: $12 \cdot 9^\circ = 108^\circ$
- Úszás: $8 \cdot 9^\circ = 72^\circ$
- Tenisz: $4 \cdot 9^\circ = 36^\circ$



Gyakoriság és gyakorisági sokszög

Definíció: A gyakoriság és a gyakorisági sokszög

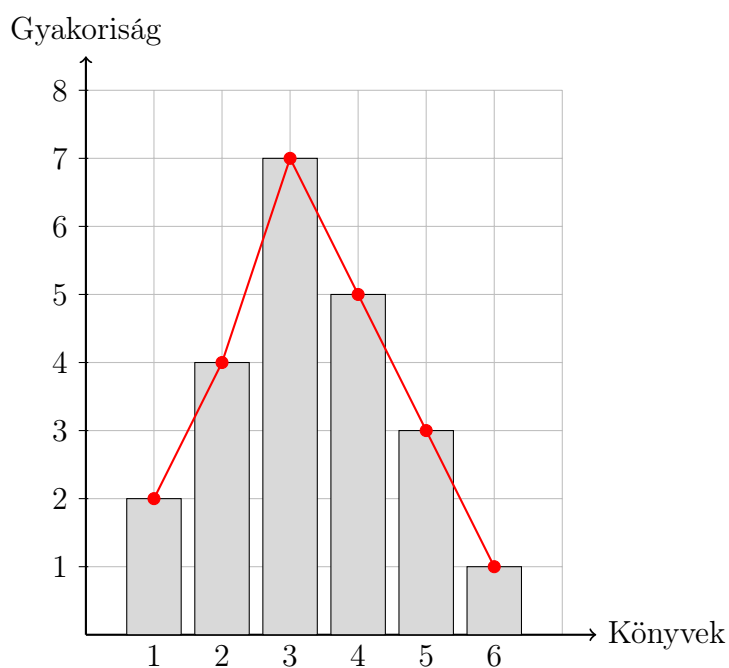
A statisztikai adatok elemzésekor azt a számot, amely megmutatja, hogy egy adott érték (pl. egy osztályzat vagy egy mért eredmény) hányszor fordult elő a felmérés során, **gyakoriságnak** nevezzük.

Ezeket az adatokat nemcsak oszlopokkal, hanem vonalakkal is ábrázolhatjuk. Ha az oszlopdiagram oszlopainak felső lapjainak felezőpontjait egyenes szakaszokkal összekötjük, a kapott töröttvonalat **gyakorisági sokszögnek** nevezzük.

4. Gyakorlati példa (Oszlopok és sokszög egyesítése): Egy könyvtár olvasási versenyén feljegyezték, hogy a résztvevő diákok hány darab könyvet olvastak el a nyár folyamán.

Elolvasott könyvek (db)	1	2	3	4	5	6
Gyakoriság (diákok száma)	2	4	7	5	3	1

Szemléltessük az eredményt oszlopdiagrammal, és rajzoljuk bele a gyakorisági sokszöget is!



5. Gyakorlati példa (Tisztán gyakorisági sokszög): A gyakorisági sokszöget önállóan is megrajzolhatjuk (az oszlopok nélkül). Egy futóverseny résztvevőinek életkorát vizsgálták a következő táblázat szerint:

Életkor (év)	18	20	22	24	26	28	30
Gyakoriság	0	3	6	8	5	2	0

